

Radar MIMO en présence d’erreurs de modèles : une approche par les bornes de Cramér-Rao

Nguyen Duy TRAN^{1,2}, Alexandre RENAUX¹, Rémy BOYER¹, Sylvie MARCOS¹ Pascal LARZABAL²

¹Université Paris-Sud 11 / CNRS / SUPELEC
Laboratoire des Signaux et Systèmes,
Supelec, 3, rue Joliot-Curie, 91192 Gif-sur-Yvette, France

²Ecole Normale Supérieure de Cachan
Laboratoire SATIE / CNRS
61 av. du Président Wilson, 94235 Cachan, France

{NguyenDuy.Tran, Renaux, Remy.Boyer, Marcos}@lss.supelec.fr, larzabal@satie.ens-cachan.fr

Résumé – Dans cette contribution, nous étudions l’influence, sur les performances d’un radar MIMO, de l’erreur de modélisation du signal reçu. Pour cela, nous donnons des expressions analytiques de la borne de Cramér-Rao de l’estimation des paramètres d’un modèle d’observation d’un radar MIMO (avec l’émetteur et récepteur largement espacés) affecté par des erreurs de modélisation. Nous montrons que, même en condition asymptotique pour le rapport signal-bruit, la borne de Cramér-Rao et l’Erreur Quadratique Moyenne (EQM) de l’estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de l’angle d’arrivée ne convergent pas vers zéro (contrairement au cas classique sans les erreurs de modélisation). Nous montrons que la borne de Cramer-Rao converge vers une limite strictement supérieure à zéro, dont nous donnons une expression analytique. Cette limite ne dépend pas du nombre d’échantillons. En outre, nous fournissons aussi une expression analytique de la valeur critique du rapport signal-bruit pour laquelle cette limitation de la performance apparaît. Les simulations montrent l’efficacité asymptotique de la méthode EMV.

Abstract – In this paper, we study the impact of modeling error on the receiver of a MIMO radar. Following other works on classical array processing, we derive closed-form expressions of the Cramér-Rao bounds for an observation model of a widely spaced MIMO radar affected by modeling error. We show that, as the signal-to-noise ratio increases, the Cramér-Rao bound and the mean square error of the maximum likelihood estimator of the angle-of-arrival do not fall to zero (contrary to the classical case without error modeling) and converge to a fixed limit for which we give a closed-form expression. Moreover, we give a simple closed-form expression of the critical value of the signal-to-noise ratio where this limitation of performance appears.

1 Introduction

Dans la littérature, lors de la mise en place d’algorithmes d’estimation dit à haute résolution pour la localisation de sources à l’aide d’un réseau de capteurs, la réponse du réseau est supposée connue. Cependant ce n’est pas toujours le cas en pratique et le modèle d’observation supposé peut être différent de celui utilisé par l’algorithme. En particulier, la variation de la position des éléments du réseau d’antenne joue un rôle fondamental et peut rendre inexploitable la matrice directionnelle (qui représente la réponse du réseau de capteurs vis-à-vis des sources) utilisée lors de la phase d’estimation des directions d’arrivées. C’est pourquoi plusieurs travaux ont été effectués pour quantifier l’impact de ces erreurs de modèles en terme de performance d’estimation. Dans ce contexte, cette contribution s’intéresse au radar MIMO (Multiple Input/Multiple Output), c’est-à-dire un système radar composé de plusieurs voies d’émission indépendantes entre elles et d’un ensemble de récepteurs. Cette technologie a été initialement proposée dans les années 80 par des Français (Radar à Impulsion et Antenne Synthétique (RIAS) développé par l’ONERA [1]) mais était li-

mité par les possibilités de traitement disponibles à l’époque. Le sujet est revenu récemment sur le devant de la scène grâce à l’amélioration constante des outils de calculs. En particulier, il a été démontré que ce type de système permet une amélioration significative des performances qu’elles soient de détection ou de localisation par rapport aux antennes phases classiques (on citera l’ouvrage collectif récent [2]).

L’étude de l’influence des erreurs de modèles dans le contexte susmentionné du radar MIMO a déjà donné lieu à quelques travaux, en particulier, [3], [4], [5] et [6]. Toutefois, ces résultats concernent seulement l’erreur de synchronisation de phase entre l’ensemble des émetteurs et des récepteurs. En outre, dans le cadre plus classique du traitement d’antenne pour la localisation passive de sources, certains travaux ont été réalisés. On peut citer par exemple [7], [8] et plus récemment [9]. Notre approche suit l’idée proposée dans [9] où l’erreur affectant le vecteur directionnel est modélisée par un vecteur aléatoire gaussien ajouté au vecteur directionnel idéal. Nous dérivons des expressions analytiques des bornes de Cramér-Rao pour la localisation d’une source par un radar MIMO lorsque l’émetteur et

le récepteur sont largement espacés.

Nous montrons que, lorsque le rapport signal sur bruit augmente, les bornes Cramér-Rao (BCR) et l'erreur quadratique moyenne (EQM) de l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) ne tendent pas vers zéro (contrairement au cas classique sans les erreurs de modèles) et convergent vers une limite fixe dont nous donnons une expression analytique. En outre, nous donnons une expression analytique simple de la valeur critique du rapport signal sur bruit où cette limitation des performances apparaît.

2 Modèle

Nous considérons un radar MIMO dont les émetteurs et les récepteurs sont largement espacés. Les deux réseaux d'antennes sont supposés linéaires avec un nombre de capteurs à l'émission et à la réception noté M et N , respectivement. Dans ce contexte, une source est localisée par deux paramètres : l'angle de départ noté θ_D et l'angle d'arrivée noté θ_A . Par conséquent, le modèle d'observation est donné par [2] :

$$\mathbf{y}(t) = \beta \mathbf{b}(\theta_A) \mathbf{a}^T(\theta_D) \mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t), \quad t = 1 \dots T, \quad (1)$$

où T est le nombre d'observations, β est une amplitude complexe liée à la surface équivalente radar (SER) de la cible. Le vecteur $\mathbf{x}(t)$ contient les M formes d'onde transmises avec la matrice de covariance empirique suivante :

$$\mathbf{R}_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) = \sigma_x^2 \mathbf{I}_M.$$

Les vecteurs directionnels pour l'émetteur et le récepteur ont les structures suivantes $\mathbf{a}(\theta_D) = [\exp(-j\frac{2\pi}{\lambda} a_1 \sin \theta_D), \dots, \exp(-j\frac{2\pi}{\lambda} a_M \sin \theta_D)]^T$, et $\mathbf{b}(\theta_A) = [\exp(-j\frac{2\pi}{\lambda} b_1 \sin \theta_A), \dots, \exp(-j\frac{2\pi}{\lambda} b_N \sin \theta_A)]^T$, où λ est la longueur d'onde, et les quantités $a_i, i = 1 \dots M$, et $b_j, j = 1 \dots N$, sont les positions nominales des capteurs (par rapport à un point de référence) du réseau d'antennes d'émission et de réception, respectivement. Enfin, les vecteurs de bruit $\{\mathbf{n}(t)\}_{t=1}^T$ sont supposés Gaussiens, circulaires, i.i.d., de moyenne nulle et de matrice de covariance $\mathbf{R}_n = \sigma_n^2 \mathbf{I}_N$.

Dans cette contribution, nous considérons que le vrai vecteur directionnel de réception, $\mathbf{b}_v(\theta_A)$, est soumis à une erreur de modèle représentée par un vecteur aléatoire additif \mathbf{e} . En d'autres termes, $\mathbf{b}(\theta_A) = \mathbf{b}_v(\theta_A) + \mathbf{e}$, où \mathbf{e} est supposé circulaire et Gaussien, à savoir $\mathbf{e} \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_e^2 \mathbf{I}_N)$. De plus, \mathbf{e} est supposé statistiquement indépendant du vecteur de bruit $\mathbf{n}(t)$, $\forall t$. Le vecteur de paramètres inconnus est $\Theta = [\theta_D, \theta_A, \beta_R, \beta_I]^T$ où β_R et β_I sont les parties réelle et imaginaire de β .

Enfin, notont que¹, dans ce cas, la vraisemblance des observations est circulaire complexe Gaussienne avec une moyenne

1. C'est tout à fait différent du cas classique (dans le contexte du radar MIMO ou dans le contexte du traitement d'antennes) où seule la moyenne ou la matrice de covariance sont paramétrées. Notons aussi que l'analyse de l'erreur de modélisation à la fois sur l'émetteur et le récepteur semble être un travail très complexe. En effet, dans ce cas, le vecteur des observations est la somme d'un vecteur déterministe plus un vecteur Gaussien, plus le produit de deux vecteurs Gaussiens dépendant du premier vecteur Gaussien.

et une matrice de covariance paramétrés, i.e., en posant $\mathbf{y} = [\mathbf{y}^T(1) \dots \mathbf{y}^T(T)]^T \in \mathbb{C}^{NT}$, $\mathbf{y} | \Theta \sim \mathcal{CN}(\mathbf{m}(\Theta), \mathbf{R}(\Theta))$ où $\mathbf{m}(\Theta) = \text{vec}([\beta \mathbf{b}_v(\theta_A) \mathbf{a}^T(\theta_D) \mathbf{x}(1) \dots \beta \mathbf{b}_v(\theta_A) \mathbf{a}^T(\theta_D) \mathbf{x}(T)])$, où $\text{vec}(\cdot)$ est l'opérateur de vectorisation d'une matrice et où $\mathbf{R}(\Theta) = |\beta|^2 \sigma_e^2 \mathbf{s}(\theta_D) \mathbf{s}^H(\theta_D) \otimes \mathbf{I}_N + \sigma_n^2 \mathbf{I}_{NT}$, et $\mathbf{s}(\theta_D) = [\mathbf{a}^T(\theta_D) \mathbf{x}(1) \dots \mathbf{a}^T(\theta_D) \mathbf{x}(T)]^T$. On note que le vecteur de paramètres complet paramétrise la moyenne, tandis que seulement θ_D, β_R , et β_I paramétrisent la matrice de covariance des observations.

3 Borne de Cramér-Rao

Pour un modèle paramétré gaussien général telle que

$$\mathbf{y} | \Theta \sim \mathcal{CN}(\mathbf{m}(\Theta), \mathbf{R}(\Theta)), \quad (2)$$

il est bien connu que l'élément (i, j) de la matrice de l'information de Fisher $\mathbf{F}(\theta)$ est donné par la formule de Slepian-Bang (voir, par exemple, [10])

$$\{\mathbf{F}(\Theta)\}_{i,j} = \text{Tr} \left\{ \mathbf{R}^{-1}(\Theta) \frac{\partial \mathbf{R}(\Theta)}{\partial \{\Theta\}_i} \mathbf{R}^{-1}(\Theta) \frac{\partial \mathbf{R}(\Theta)}{\partial \{\Theta\}_j} \right\} + 2\Re \left\{ \frac{\partial \mathbf{m}^H(\Theta)}{\partial \{\Theta\}_i} \mathbf{R}^{-1}(\Theta) \frac{\partial \mathbf{m}(\Theta)}{\partial \{\Theta\}_j} \right\}, \quad (3)$$

où $\{\theta\}_{i=1, \dots, 4}$ définit l'élément i^{me} du vecteur Θ . Sans perte de généralité, les points de référence pour les réseaux de transmission et de réception sont choisis tels que

$$\mathbf{a}^H(\theta_D) \dot{\mathbf{a}}(\theta_D) = 0 \text{ and } \mathbf{b}_v^H(\theta_A) \dot{\mathbf{b}}_v(\theta_A) = 0, \quad (4)$$

où on définit $\dot{\mathbf{a}}(\theta_D) = \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_D)}{\partial \theta_D}$, et $\dot{\mathbf{b}}_v(\theta_A) = \frac{\partial \mathbf{b}_v(\theta_A)}{\partial \theta_A}$.

Après calcul, les éléments de la matrice de l'information de Fisher sont donnés par

$$\{\mathbf{F}(\Theta)\}_{1,1} = \frac{8\pi^2 |\beta|^2 T N \sigma_x^2}{\lambda^2 \sigma_n^2} \cos^2(\theta_D) \sum_{k=1}^M a_k^2 \times \left(1 + \frac{|\beta|^2 T M \sigma_x^2 \sigma_e^4}{\sigma_n^2 + |\beta|^2 T M \sigma_x^2 \sigma_e^2} \right), \quad (5)$$

$$\{\mathbf{F}(\Theta)\}_{2,2} = \frac{8\pi^2}{\lambda^2} |\beta|^2 T M \sigma_x^2 \cos^2 \theta_A \sum_{k=1}^N b_k^2, \quad (6)$$

$$\{\mathbf{F}(\Theta)\}_{3,3} = N \left(\frac{2\beta_R T M \sigma_x^2 \sigma_e^2}{\sigma_n^2 + |\beta|^2 T M \sigma_x^2 \sigma_e^2} \right)^2 + \frac{2 T N M \sigma_x^2}{\sigma_n^2 + |\beta|^2 T M \sigma_x^2 \sigma_e^2}, \quad (7)$$

$$\{\mathbf{F}(\Theta)\}_{4,4} = N \left(\frac{2\beta_I T M \sigma_x^2 \sigma_e^2}{\sigma_n^2 + |\beta|^2 T M \sigma_x^2 \sigma_e^2} \right)^2 + \frac{2 T N M \sigma_x^2}{\sigma_n^2 + |\beta|^2 T M \sigma_x^2 \sigma_e^2}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}(\Theta)\}_{3,4} &= \{\mathbf{F}(\Theta)\}_{4,3} \\ &= 4N\beta_R\beta_I \left(\frac{TM\sigma_x^2\sigma_e^2}{\sigma_n^2 + |\beta|^2 TM\sigma_x^2\sigma_e^2} \right)^2, \end{aligned} \quad (9)$$

et tous les autres éléments de la matrice de l'information de Fisher sont égaux à zéro conduisant à une structure bloc diagonale (seuls les paramètres β_R et β_I sont couplés tandis que toutes les autres combinaisons sont découplées).

Après inversion de la matrice d'information de Fisher, nous montrons que les bornes de Cramér-Rao pour la direction de départ et la direction d'arrivée sont données par

$$BCR(\theta_D) = \frac{\lambda^2 \sigma_n^2 (\sigma_n^2 + |\beta|^2 TM\sigma_x^2\sigma_e^2)}{8\pi^2 |\beta|^2 TN\sigma_x^2 (\sigma_n^2 + |\beta|^2 TM\sigma_x^2\sigma_e^2 (1 + \sigma_e^2)) \cos^2(\theta_D) \sum_{k=1}^M a_k^2}, \quad (10)$$

et

$$BCR(\theta_A) = \frac{\sigma_n^2 + |\beta|^2 TM\sigma_x^2\sigma_e^2}{\frac{8\pi^2}{\lambda^2} |\beta|^2 TM\sigma_x^2 \cos^2 \theta_A \sum_{k=1}^N b_k^2}. \quad (11)$$

En raison du manque d'espace, nous ne donnons pas les expressions analytiques de $BCR(\beta_R)$ and $BCR(\beta_I)$, qui concernent ici un paramètre complexe de nuisance.

4 Résultats de Simulation

Afin d'analyser le comportement des bornes de Cramér-Rao susmentionnées, on considère ici certains résultats de simulation. Le scénario est le suivant : l'émetteur et le récepteur sont des antennes linéaires uniformes avec $M = N = 4$ capteurs, respectivement, et avec un espacement inter-capteur d'une demi longueur d'onde. Les formes d'ondes orthogonales de radar MIMO sont générées en utilisant des codes de Hadamard avec $T = 32$ observations. Les vraies valeurs de l'angle du départ et de l'angle d'arrivée de la cible sont $\theta_D = 67,5^\circ$ et $\theta_A = 22,5^\circ$, et nous supposons que $\beta = 1 + j$. La puissance totale émise est de $M\sigma_x^2 = 1$. La figure 1 montre le comportement des bornes de Cramér-Rao pour les paramètres d'intérêt en fonction du rapport signal sur bruit de réseau (RSBR) c'est-à-dire $RSBR = \frac{MN\sigma_x^2}{\sigma_n^2}$. Notons que nous ne traçons pas $BCR(\beta_I)$ car il a le même comportement que $BCR(\beta_R)$. Nous traçons également l'erreur quadratique moyenne empirique de l'estimateur du maximum de vraisemblance évalué au travers de 1000 tirages de Monte Carlo. Cette première simulation représente le comportement des bornes de Cramér-Rao et de l'estimateur du maximum de vraisemblance sans erreur de modèles, c'est-à-dire avec $\sigma_e^2 = 0$. Nous notons que l'on retrouve le comportement classique des bornes de Cramér-Rao qui diminuent de façon linéaire lorsque le RSBR (en dB) augmente. Nous notons également que l'estimateur du maximum de vraisemblance atteint asymptotiquement la borne de Cramér-Rao (lorsque $RSBR \rightarrow \infty$) [11].

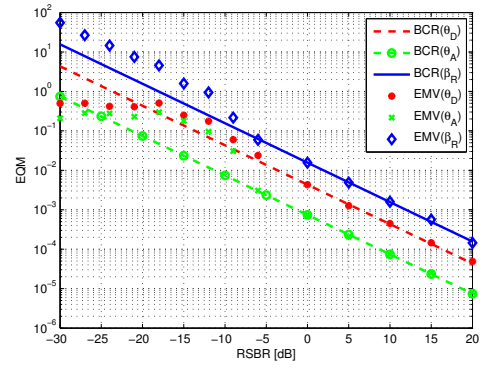


FIGURE 1 – l'EQM de l'EMV et BCR en fonction du RSBR sans l'erreurs de modèles

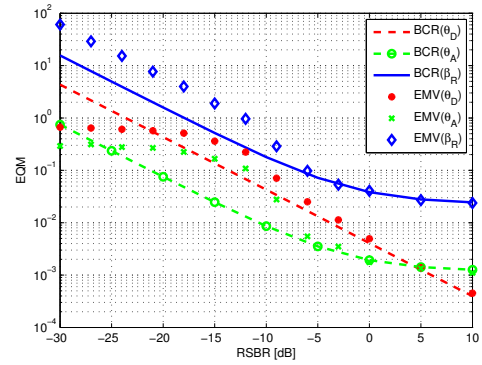


FIGURE 2 – l'EQM de l'EMV et BCR en fonction du RSBR lorsque $\sigma_e^2 = 0.1$

La figure 2 montre le comportement des bornes de Cramér-Rao et de l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur du maximum de vraisemblance lorsque $\sigma_e^2 = 0.1$. Encore une fois, nous observons l'efficacité asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance, mais, lorsque $ANSR \rightarrow \infty$, la borne de Cramér-Rao ainsi que l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur du maximum de vraisemblance de l'angle d'arrivée θ_A ne tendent pas vers zéro et convergent vers une limite fixe qui peut être obtenue à partir de l'Eqn. (11) et qui est égale à

$$\lim_{RSBR \rightarrow \infty} BCR(\theta_A) = \frac{\sigma_e^2}{\frac{8\pi^2}{\lambda^2} \cos^2 \theta_A \sum_{k=1}^N b_k^2}. \quad (12)$$

Notons que cette valeur est indépendante de β . Cette convergence signifie que pour un niveau de "puissance" donné de l'erreur de modélisation σ_e^2 , au delà d'une certaine valeur de RSBR, aucune amélioration en terme de performance ne peut plus être attendue. Par contre on notera que la position des capteurs peut être avantageusement utilisée pour diminuer cette limite. On définit cette valeur de seuil du RSBR notée $RSBR_0$ comme la valeur à laquelle, $BCR(\theta_A) = (1+\epsilon) \times \lim_{RSBR \rightarrow \infty} BCR(\theta_A)$.

Nous obtenons l'expression analytique suivante

$$RSBR_0 = 10 \log_{10} \frac{N}{\epsilon \sigma_e^2 T |\beta|^2}. \quad (13)$$

Cette expression montre que $RSBR_0$ est linéaire (en dB) concernant σ_e^2 . Notons que le même comportement se produit sur β_R et β_I lorsque $ANSR \rightarrow \infty$, et nous avons

$$\lim_{RSBR \rightarrow \infty} CRB(\beta_R) = \frac{\sigma_e^2 (|\beta|^2 + 2\sigma_e^2 \beta_I)}{2N(1 + 2\sigma_e^2)}, \quad (14)$$

et

$$\lim_{RSBR \rightarrow \infty} CRB(\beta_I) = \frac{\sigma_e^2 (|\beta|^2 + 2\sigma_e^2 \beta_R)}{2N(1 + 2\sigma_e^2)}. \quad (15)$$

Enfin, nous avons tracé sur la figure 3 les bornes de Cramér-Rao en fonction de σ_e^2 avec $RSBR = 20dB$. Encore une fois, nous notons que les deux θ_A et β sont affectés par l'erreur de modélisation alors que θ_D n'est pas affectée, en raison du fait que les erreurs n'affectent que le récepteur.

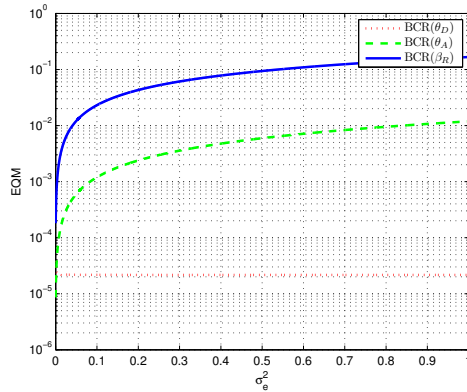


FIGURE 3 – les bornes de Cramér-Rao versus σ_e^2 avec $RSBR = 20dB$.

5 Conclusion

Grâce aux bornes de Cramér-Rao, nous avons étudié l'influence d'une erreur de modélisation sur le récepteur du radar MIMO. À cette intention, nous avons dérivé les expressions analytiques de la matrice de l'information de Fisher et montré sa structure bloc diagonale. Cela nous a permis de déduire les expressions des bornes de Cramér-Rao de l'angle d'arrivée et de l'angle de départ. Nous avons montré que, à partir d'un certain rapport signal à bruit, les performances du système ne peuvent plus être améliorées. Enfin, nous avons proposé une formule simple pour évaluer cette valeur critique du rapport signal à bruit.

Références

- [1] J. Dorey, G. Garnier, and G. Auvray, "RIAS, a synthetic impulse antenna radar," in *Proc. Int. Radar Conf.*, Paris, 1989, pp. 556–562.
- [2] J. Li and P. Stoica, *MIMO Radar Signal Processing*. New York : Wiley, 2009.
- [3] H. Godrich, A. M. Haimovich, and H. V. Poor, "An analysis of phase synchronization mismatch sensitivity for coherent MIMO radar systems," in *Proc. Third International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP)*, Dec. 2009.
- [4] Q. He and R. S. Blum, "Cramér-Rao bound for MIMO radar target localization with phase errors," *IEEE Signal Processing Letters*, no. 1, pp. 83–86, Jan. 2010.
- [5] H. Godrich, A. M. Haimovich, and H. V. Poor, "Localization performance of coherent MIMO radar systems subject to phase synchronization errors," in *4th International Symposium on Communications, Control and Signal Processing (ISCCSP)*, Mar. 2010.
- [6] M. Akçakaya and A. Nehorai, "MIMO radar detection and adaptive design under a phase synchronization mismatch," *IEEE Transactions on Signal Processing*, no. 10, pp. 4994–5005, Oct. 2010.
- [7] Y. Rockah and P.M.Schultheiss, "Array shape calibration using sources in unknown locations-part i : Far-field sources," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, no. 3, pp. 286–299, Mar. 1987.
- [8] M. Viberg and A. L. Swindlehurst, "Analysis of the combined effects of finite samples and model errors on array processing performance," *IEEE Transactions on Signal Processing*, no. 11, pp. 3073–3083, Nov. 1994.
- [9] A. Ferréol, P. Larzabal, and M. Viberg, "Statistical analysis of the MUSIC algorithm in the presence of modeling errors, taking into account the resolution probability," *IEEE Transactions on Signal Processing*, no. 58, pp. 4156–4166, Aug. 2010.
- [10] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory*. Upper Saddle River, NJ, USA : Prentice-Hall, Inc., Mar. 1993, vol. 1.
- [11] A. Renaux, P. Forster, E. Chaumette, and P. Larzabal, "On the high-SNR conditional maximum-likelihood estimator full statistical characterization," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 12, pp. 4840–4843, Dec. 2006.