

Une nouvelle approche de résolution limite dans le cadre d'estimation paramétrique multidimensionnelle

C. REN¹, M. N. EL KORSO², J. GALY³, E. CHAUMETTE⁴, P. LARZABAL⁵ et A. RENAUX¹

¹Université Paris-Sud/LSS, 3 Rue Joliot-Curie, 91192 Gif-sur-Yvette, France.

²Université Paris-Ouest 10/LEME EA 4416, IUT de Ville d'Avray, France.

³Université de Montpellier 2/LIRMM, 161 rue Ada 34392 Montpellier Cedex 5, France.

⁴Toulouse-ISAE/DEOS, 10 Avenue Edouard Belin, Toulouse, France.

⁵ENS Cachan/SATIE, 61 av. du Président Wilson, 94235 Cachan cedex, France.

cren@lss.supelec.fr

Résumé – Par cette communication, nous proposons une nouvelle approche de résolution limite basée sur la définition de probabilité de résolution dans le contexte d'estimation de paramètres multidimensionnels. Ce critère est fondé sur une approche probabiliste de la séparabilité et permet également de mesurer la précision des valeurs estimées. Une étude analytique de ce critère a été proposée dans le cas où le modèle d'observation est gaussien. Enfin, une comparaison avec des critères de résolution existants a été étudiée dans le cas du problème de localisation de sources.

Abstract – In this paper, we propose a new statistical resolution limit criterion based on the definition of probability of resolution in the context of multi-dimensional parameters estimation. This criterion is based on a probabilistic approach of the separability and also allows to measure the accuracy of estimate's values. Exact and approximation calculus of this criterion is given in the gaussian observation model. Finally, a comparison with existing resolution limits is studied in the case of direction of arrival estimation problem.

1 Introduction

La résolution limite caractérise la distance minimale entre les paramètres d'intérêts au-dessus de laquelle la séparation de ces paramètres est possible. En estimation statistique, les observations sont modélisées par des variables aléatoires dont leurs caractéristiques dépendent des paramètres d'intérêt. Ainsi, il est nécessaire d'introduire la notion de "résolution limite statistique" qui définit une probabilité de résolution/séparation des paramètres d'intérêt en tenant compte du caractère aléatoire des observations.

Historiquement, (i) la première approche de résolution limite statistique a été proposée par Cox en 1973 [1]. Cette approche est basée sur les critères de minimisation nommés *null spectrum*, noté $C(\mathbf{y}, \theta)$. Si θ_1 et θ_2 sont les paramètres à estimer à partir des observations \mathbf{y} , ce critère affirme que θ_1 et θ_2 sont résolubles si $\mathbb{E}_{\mathbf{y}|\theta_1, \theta_2} [C(\mathbf{y}, \theta_1)] < \mathbb{E}_{\mathbf{y}|\theta_1, \theta_2} [C(\mathbf{y}, \frac{\theta_1 + \theta_2}{2})]$ et $\mathbb{E}_{\mathbf{y}|\theta_1, \theta_2} [C(\mathbf{y}, \theta_2)] < \mathbb{E}_{\mathbf{y}|\theta_1, \theta_2} [C(\mathbf{y}, \frac{\theta_1 + \theta_2}{2})]$. Ces deux derniers critères, sous certaines conditions, sont équivalents à une étude de la convexité de la fonction $\mathbb{E}_{\mathbf{y}|\theta_1, \theta_2} [C(\mathbf{y}, \theta)]$ au point médian de θ_1 et θ_2 [2]. Cependant, les critères susmentionnés dépendent de l'algorithme utilisé. (ii) Une deuxième approche basée sur la Borne de Cramér-Rao (BCR) a été proposée dans [3, 4]. Cette dernière a l'avantage d'être indépendante de l'algorithme choisi. Ce critère stipule que θ_1 et θ_2 sont résolus si $|\theta_1 - \theta_2| \geq 2 \max(\sqrt{BCR(\theta_1)}, \sqrt{BCR(\theta_2)})$. Cependant, ce critère ne prend pas en compte le couplage entre les deux paramètres. Ainsi, une amélioration a été proposée par Smith [5], sous la forme suivante $|\theta_1 - \theta_2|^2 \geq BCR(|\theta_1 - \theta_2|)$. (iii) Bien que

l'approche précédente soit simple à mettre en oeuvre, elle ne prend pas en compte, de façon explicite, le réglage de la résolution limite en terme de probabilité de séparation entre les paramètres. Heureusement, une troisième approche a été proposée par [6, 7] basée sur la théorie de détection. Cette approche reformule le problème de résolubilité par un test d'hypothèse binaire où l'hypothèse \mathcal{H}_0 suppose que les données sont générées à partir d'un modèle comportant un paramètre d'intérêt (c'est à dire une seule source) et l'hypothèse \mathcal{H}_1 suppose que les données suivent un modèle avec deux paramètres d'intérêt. Cette approche détermine le seuil de résolution en fonction de la probabilité de fausse alarme P_{fa} et de la probabilité de détection P_d en utilisant le test du maximum de vraisemblance généralisé. (iv) La dernière approche est basée sur la probabilité de résolution qui permet à la fois de résoudre les paramètres d'intérêts et d'imposer la précision de l'estimation. Ceci consiste à déterminer la probabilité P_{res} tel que les estimés appartiennent à des ensembles disjoints. Par conséquent, les paramètres sont résolus avec une probabilité P_{res} et des intervalles de confiance sont établis pour les valeurs estimées. Ce concept a été initialement introduit par Oh et Kashyap [8] dans le cadre de paramètre scalaire puis étendue par Clark [9] dans le cas d'estimation de paramètres multidimensionnels, deux à deux décorrelés, et issus d'un processus gaussien.

Le but de cette communication est d'étendre la dernière approche pour des problèmes d'estimation de paramètres multidimensionnels, non nécessairement gaussiens, ni décorrelés, et de déterminer la probabilité de résolution en utilisant des approximations d'ensembles disjoints.

2 Rappels et définitions

Soit $\theta_1 \in \mathbb{R}$ et $\theta_2 \in \mathbb{R}$ deux paramètres à estimer à partir des observations $\mathbf{y} \in \Omega$. Soit $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2]^T$ un estimateur des paramètres θ_1 et θ_2 . Dans [8], le critère de résolution énonce que l'estimateur $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ peut résoudre les paramètres θ_1 et θ_2 avec une probabilité de résolution P_{res} si

$$P_{res} = \min \left(\Pr \left(\hat{\theta}_1 - \theta_1 \in]-\Delta; \Delta[\right), \Pr \left(\hat{\theta}_2 - \theta_2 \in]-\Delta; \Delta[\right) \right) \quad (1)$$

où $\Delta = \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{2}$. Puisque Δ a été choisi tel que l'intersection entre les intervalles $]\theta_1 - \Delta; \theta_1 + \Delta[$ et $]\theta_2 - \Delta; \theta_2 + \Delta[$ est nulle, les estimées $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ sont bien distinctes et sont restreints dans leur intervalle respectif avec une probabilité au moins P_{res} . Cependant l'extension aux cas de paramètres vectoriels n'est pas unique et dépend de la forme des domaines délimitant les estimées de chaque paramètres. En effet, il existe déjà une approche proposée par Clark [9] pour des estimateurs distribués suivant une loi gaussienne où les domaines délimitant les estimées sont des hyper-ellipses. Dans la suite, $\{\boldsymbol{\theta}_m^0\}_{m=1, \dots, p}$ désignera un ensemble de paramètres d'intérêts à estimer à partir des observations \mathbf{y} par l'estimateur $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_m\}_{m=1, \dots, p}$. Contrairement à [9], le but de cette communication est d'une part de proposer une nouvelle définition de probabilité de résolution dans le cas d'estimation de paramètres multidimensionnels, non nécessairement gaussiens, ni décorélés, basée sur des domaines hyper-rectangles et d'autre part d'établir une relation d'ordre au sens de mesure de probabilité entre les domaines hyper-rectangles et les domaines hyper-ellipses permettant d'obtenir une méthode d'évaluation plus simple de P_{res} .

3 Nouvelle approche pour la résolution multidimensionnelle

3.1 Approximation d'ensembles disjoints

Soit $\{\boldsymbol{\varepsilon}_m^+\}_{m=1, \dots, p}$ et $\{\boldsymbol{\varepsilon}_m^-\}_{m=1, \dots, p}$ un ensemble de vecteurs réels tel que $\boldsymbol{\varepsilon}_m^+ \in \mathbb{R}^{q+}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_m^- \in \mathbb{R}^{q+}$, $1 \leq m \leq p$. On définit un hyper-rectangle, noté $R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)$, $1 \leq m \leq p$, par $R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) = \{\boldsymbol{\theta}_m \in \mathbb{R}^q | \forall 1 \leq j \leq q, (\boldsymbol{\theta}_m)_j - (\boldsymbol{\theta}_m^0)_j \in]-(\boldsymbol{\varepsilon}_m^-)_j; (\boldsymbol{\varepsilon}_m^+)_j[\}$, où $(\boldsymbol{\theta}_m)_j$ désigne la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\boldsymbol{\theta}_m$. Donc $R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)$ délimite un espace d'estimation pour le paramètre $\boldsymbol{\theta}_m^0$. Cette définition nous servira pour introduire la précision et la résolubilité d'un estimateur. Ceci peut être réécrit par

$$R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) = \left\{ \boldsymbol{\theta}_m \in \mathbb{R}^q | \forall 1 \leq j \leq q, \left| (\boldsymbol{\theta}_m)_j - (\boldsymbol{\theta}_m^0)_j - \frac{d(\boldsymbol{\varepsilon}_m)_j}{2} \right| \leq (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m)_j \right\},$$

avec $d(\boldsymbol{\varepsilon}_m)_j = (\boldsymbol{\varepsilon}_m^+)_j - (\boldsymbol{\varepsilon}_m^-)_j$ et $(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m)_j = \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_m^+)_j + (\boldsymbol{\varepsilon}_m^-)_j}{2}$. On peut établir la relation d'ordre suivante

$$E_s^1(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) \subset R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) \subset E_s^q(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+), \quad (2)$$

avec $E_s^r(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) = \left\{ \boldsymbol{\theta}_m \in \mathbb{R}^q | \sum_{j=1}^q \left| \frac{(\boldsymbol{\theta}_m)_j - (\boldsymbol{\theta}_m^0)_j - \frac{d(\boldsymbol{\varepsilon}_m)_j}{2}}{(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m)_j} \right| \leq r \right\}$, où $r > 0$ et $s > 0$. $E_s^\lambda(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)$ est une généralisation du

hyper-ellipse correspondant au cas $s = 2$. Et de plus

$$R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} E_s^q(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} E_s^1(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+).$$

D'après ces propriétés, tout hyper-rectangle $R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)$ est borné par les hypervolumes $E_s^1(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)$ et $E_s^q(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)$ qui convergent vers $R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)$ lorsque s tend vers l'infini. Cette propriété d'encadrement du hyper-rectangle est utile pour déterminer une valeurs approchée de la précision d'estimation et du seuil de résolution limite.

3.2 Précision d'estimation

La qualité première d'un estimateur est sa précision. En estimation statistique, la précision d'un estimateur peut être mesuré par la fonction $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\theta}_m^0}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) = \Pr(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m \in R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+))$ pour tout estimateur $\hat{\boldsymbol{\theta}}_m$ du paramètre $\boldsymbol{\theta}_m^0$. C'est la probabilité que les estimées se restreignent dans un hyper-rectangle. A probabilité de résolution P_{res} fixée, plus l'hyper-rectangle est petit, plus l'estimateur $\hat{\boldsymbol{\theta}}_m$ sera précis. Par la propriété d'encadrement (2), nous avons

$$\Pr(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m \in E_s^1(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)) \leq \mathcal{O}_{\boldsymbol{\theta}_m^0}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) \leq \Pr(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m \in E_s^q(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)). \quad (3)$$

L'extension de ce critère pour l'estimation d'un ensemble de paramètres $\boldsymbol{\theta}^0 = [(\boldsymbol{\theta}_1^0)^T \dots (\boldsymbol{\theta}_p^0)^T]^T$ par des estimateurs de type $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^T \dots \hat{\boldsymbol{\theta}}_p^T]^T$ est définie par

$$\mathcal{O}_{\boldsymbol{\theta}^0}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+) = \Pr\left(\bigcap_{m=1}^p \hat{\boldsymbol{\theta}}_m \in R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)\right). \quad (4)$$

où $\boldsymbol{\Xi}^{-+} = [(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{-+})^T \dots (\boldsymbol{\varepsilon}_p^{-+})^T]^T$. L'équation (4) définit la probabilité que l'estimateur $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ se restreigne aux ensembles $\{R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)\}_{m=1 \dots p}$. Elle équivaut à

$$\mathcal{O}_{\boldsymbol{\theta}^0}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+) = \Pr(\hat{\boldsymbol{\theta}} \in R(\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+)), \quad (5)$$

où $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^{pq}$ et $R(\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+)$ est un hyper-rectangle dans \mathbb{R}^{pq} . En appliquant l'encadrement (3) pour (5), on obtient

$$\Pr(\hat{\boldsymbol{\theta}} \in E_s^1(\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+)) \leq \mathcal{O}_{\boldsymbol{\theta}^0}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+) \leq \Pr(\hat{\boldsymbol{\theta}} \in E_s^p(\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+)). \quad (6)$$

où $E_s^1(\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+)$ et $E_s^p(\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+)$ sont des hyper-ellipses dans \mathbb{R}^{pq} . Cette relation (6) sera utile pour évaluer numériquement la précision de l'estimateur $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\theta}^0}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+)$.

3.3 Probabilité de résolution

Puisque les données sont aléatoires en estimation statistique, il nous semble nécessaire de donner un critère de résolution probabiliste. L'estimateur $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ peut résoudre les sources avec une probabilité de résolution P_{res} si

$$P_{res} = \mathcal{O}_{\boldsymbol{\theta}^0}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+) = \Pr\left(\bigcap_{m=1}^p \hat{\boldsymbol{\theta}}_m \in R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)\right) \quad (7)$$

où $\{\boldsymbol{\varepsilon}_m^-\}_{m=1, \dots, p}$ et $\{\boldsymbol{\varepsilon}_m^+\}_{m=1, \dots, p}$ sont soumis aux contraintes

$$\forall i \neq j, R(\boldsymbol{\theta}_i^0, \boldsymbol{\varepsilon}_i^-, \boldsymbol{\varepsilon}_i^+) \cap R(\boldsymbol{\theta}_j^0, \boldsymbol{\varepsilon}_j^-, \boldsymbol{\varepsilon}_j^+) = \emptyset. \quad (8)$$

La résolution est totale pour $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_m\}_{m=1,\dots,p}$ s'il existe un ensemble de volumes hyper-rectangles $\{R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)\}_{m=1,\dots,p}$ soumis aux contraintes (8) tel que $P_{res} = 1$. Cependant, le support de la distribution des estimées est généralement non compact. Par conséquent, la probabilité P_{res} est inférieur à 1, et peut dépendre de plusieurs facteurs : le nombre d'observation, le rapport signal à bruit ou encore les volumes considérés $\{R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)\}_{m=1,\dots,p}$ etc... La résolution limite consiste à chercher le plus large $\{R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)\}_{m=1,\dots,p}$ disjoint soumis aux contraintes (8) pour une P_{res} fixée.

3.4 Cas de distributions gaussiennes

L'évaluation analytique de (7) est complexe sauf en présence de l'expression analytique de la fonction de répartition de l'estimateur $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Malheureusement, cette fonction de répartition n'est généralement pas accessible et nous avons au mieux une expression explicite de la densité de probabilité de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Néanmoins les encadrements donnés en (6) sont plus simple à évaluer et permettent de donner une valeur approximée de la probabilité de résolution P_{res} . Notamment si l'estimateur est gaussien c -à- d $\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}^0 + \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}^0), \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}^0))$ où $\boldsymbol{\theta}^0$ est la vraie valeur des paramètres, $\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}^0)$ est le biais de l'estimateur $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}^0)$ sa matrice de covariance. En utilisant l'encadrement (6) où le domaine hyper-ellipse peut être écrit sous la forme

$$E_2^\lambda(\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+) = \left\{ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{pq} \mid \|\text{diag}^{-1}(\boldsymbol{\Xi})(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^0 - \frac{d\boldsymbol{\Xi}}{2})\|_2^s < \lambda \right\}$$

avec $\boldsymbol{\Xi} = \frac{\boldsymbol{\Xi}^- + \boldsymbol{\Xi}^+}{2}$, $d\boldsymbol{\Xi} = \frac{\boldsymbol{\Xi}^+ - \boldsymbol{\Xi}^-}{2}$ et $\text{diag}(\boldsymbol{\Xi})$ transforme le vecteur $\boldsymbol{\Xi}$ en une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les éléments du vecteur $\boldsymbol{\Xi}$. On peut démontrer que

$$\Pr(\hat{\boldsymbol{\theta}} \in E_2^\lambda(\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+)) = F_{Q_{pq}}(\lambda; \|\text{diag}^{-1}(\boldsymbol{\Xi})(\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}^0) - \frac{d\boldsymbol{\Xi}}{2})\|_2^2, \boldsymbol{\Sigma}),$$

où $F_{Q_{pq}}(x; \mu, \boldsymbol{\nu})$ est une extension de loi de khi deux à pq degrés de liberté avec paramètre de non centralité μ [10] et de variances $\boldsymbol{\nu} = [\sigma_1^2 \dots \sigma_{pq}^2]^T$ où $\{\sigma_i^2\}_{i=1..pq}$ sont les valeur propres de la matrice $\text{diag}^{-1}(\boldsymbol{\Xi})\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}^0)\text{diag}^{-1}(\boldsymbol{\Xi})$. Remarquons que dans le cas où l'estimateur $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est non biaisé $\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}^0) = \mathbf{0}$ et l'intervalle d'erreur admissible est symétrique centré en $\boldsymbol{\theta}^0$, i.e., $d\boldsymbol{\Xi} = \mathbf{0}$, alors la fonction de répartition s'écrit sous la forme explicite suivante

$$F_{Q_{pq}}(\lambda; 0, \boldsymbol{\nu}) = \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{pq}{2}}}{\pi^{\frac{pq}{2}} \sqrt{\prod_{i=1}^{pq} \sigma_i^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_k \left(-\frac{\lambda}{2}\right)^k}{\Gamma\left(\frac{pq}{2} + k + 1\right)} \quad (9)$$

avec $\omega_k = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{pq}=k} \frac{\Gamma(i_1+\frac{1}{2})\dots\Gamma(i_n+\frac{1}{2})}{i_1!\dots i_n! \sigma_1^{i_1}\dots\sigma_{pq}^{i_{pq}}}$, où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma. La forme générale de l'expression de $F_{Q_{pq}}$ est donné dans [10]. Malheureusement, cette expression n'est pas facile à programmer. Une méthode alternative numérique permettant d'évaluer $F_{Q_{pq}}(\lambda; \mu, \boldsymbol{\nu})$ est d'utiliser sa densité de probabilité définie par

$$f_{Q_{pq}}(\lambda; \mu, \boldsymbol{\nu}) = f_\chi(\lambda; \mu_1, \sigma_1^2) * \dots * f_\chi(\lambda; \mu_{pq}, \sigma_{pq}^2) \quad (10)$$

où $*$ est le produit de convolution et $f_\chi(\cdot)$ désigne la densité de probabilité de la variable aléatoire χ donnée par [11]

$f_\chi(\lambda; \mu_i, \sigma_i^2) = \frac{e^{-\frac{\lambda+\mu_i}{2\sigma_i^2}} \left(\frac{\lambda\mu_i}{\sigma_i^4}\right)^{-\frac{1}{4}} I_0\left(\sqrt{\frac{\lambda\mu_i}{\sigma_i^4}}\right)}{2\sigma_i^2}$ où $I_0(\cdot)$ est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0. Notons que l'encadrement établi dans (6) devient de plus en plus étroit lorsque s augmente. A notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature une méthode d'évaluation de $\Pr(\hat{\boldsymbol{\theta}} \in E_s^\lambda(\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+))$ lorsque $s > 2$. Néanmoins, nous pouvons toujours déterminer directement P_{res} en intégrant numériquement sur le volume hyper-rectangle la distribution des estimées lorsque elle est connue. Pour les distributions gaussiennes multivariées, P_{res} peut être évaluer numériquement à l'aide de l'algorithme proposé par [12].

4 Application à la localisation de sources

4.1 Performance asymptotique du maximum de vraisemblance conditionnel

La localisation et la séparabilité des sources sont des problèmes courants en traitement d'antennes motivé au départ par des usages militaires puis pour des applications civils tels que le positionnement par satellites, la téléphonie mobile. Considérons le problème d'estimation suivant : on souhaite localiser P sources lointaines à l'aide d'un réseau de N antennes. Le modèle d'observation est $\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}^0)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)$ où $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{C}^N$ sont les données collectées par le réseau d'antenne à l'instant t , $\boldsymbol{\theta}^0 = [\theta_1^0 \theta_2^0 \dots \theta_P^0]^T \in \mathbb{C}^P$ est le vecteur qui contient les directions d'arrivée des sources, $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(\theta_1^0) \mathbf{a}(\theta_2^0) \dots \mathbf{a}(\theta_P^0)] \in \mathbb{C}^{N \times P}$ est la matrice directionnelle et $\mathbf{a}(\cdot)$ est le vecteur directionnel, $\mathbf{s}(t) \in \mathbb{R}^P$ représente les signaux émis par les sources et $\mathbf{n}(t) \in \mathbb{C}^N$ est le bruit de mesure. Les paramètres d'intérêt sont les direction d'arrivée des sources, $\boldsymbol{\theta}^0$, qui sont supposés inconnues et non aléatoire. On suppose que $\mathbf{n}(t) \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_N)$. Dans le cas du modèle conditionnel ($\mathbf{s}(t)$ est un vecteur inconnue et non aléatoire), il est montré dans [13] que l'estimateur du maximum de vraisemblance déterministe $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MVD}}$ suit une loi gaussienne à fort rapport signal sur bruit (RSB). Pour une série de T mesures $\mathbf{t} = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_T]^T$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MVD}} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\theta}^0, \frac{\sigma^2}{2T} \left[\text{Re}(\mathbf{D}^H \mathbf{P}_{\mathbf{A}^\perp} \mathbf{D} \odot \hat{\mathbf{S}}^T)\right]^{-1}\right)$ où $\mathbf{D} = \left[\frac{d\mathbf{a}(\theta)}{d\theta}\Big|_{\theta=\theta_1^0} \ \frac{d\mathbf{a}(\theta)}{d\theta}\Big|_{\theta=\theta_2^0} \ \dots \ \frac{d\mathbf{a}(\theta)}{d\theta}\Big|_{\theta=\theta_P^0}\right]$, $\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbf{s}(t_i) \mathbf{s}^H(t_i)$ et $\mathbf{P}_{\mathbf{A}^\perp} = \mathbf{I}_N - \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}^0) (\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}^0) \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}^0))^{-1} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}^0)$.

4.2 Simulations

Le but de ces simulations est de comparer le critère de résolution proposé avec ceux exhibés dans la littérature. Considérons le cas $P = 2$ avec une antenne linéaire uniforme. Les deux sources sont étroitement espacées de $\delta = \theta_1^0 - \theta_2^0 = \frac{1}{kN}$ avec le nombre de capteurs $N = 32$ et le paramètre $k \in \{2, 4, 8, 16, 32\}$. Le vecteur directionnel s'écrit $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}) = [1 \ e^{j2\pi \sin(\theta)} \ \dots \ e^{j2\pi(N-1) \sin(\theta)}]^T$ et

$s(t) = \sqrt{\frac{RSB}{N}} [1 \ 1]^T$. Nous définissons l'hyper-rectangle symétrique $\Xi^- = \Xi^+ = \left[\frac{\delta}{2} \ \frac{\delta}{2}\right]^T$ pour P_{res} (7) tel que les estimées pour chaque paramètre appartient à un intervalle disjoint. Il s'agit de trouver le RSB minimal permettant de résoudre les sources avec une probabilité de résolution $P_{res} = 0.95$ pour une séparation angulaire de δ entre les sources. Comme on a mentionné à la section (3.4), l'évaluation de P_{res} pour une distribution gaussienne est numériquement lourde et il est plus simple de la borner par l'encadrement (6). Ces bornes pour $s = 2$ peuvent être obtenue en intégrant la densité de probabilité (10) qui s'écrit simplement dans ce cas $f_{Q_2}(\lambda; 0, \sigma^2) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{4} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)}}{2\sigma_1\sigma_2} I_0\left(\frac{\lambda}{4} \left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)\right)$. Nous montrons sur la figure (1), l'encadrement de P_{res} permettant de résoudre les sources distantes de $\delta = \frac{1}{128} rad$ en fonction du RSB. Plus le RSB augmente, plus la probabilité de résolution P_{res} augmente par déduction de ces deux bornes. La figure (2) compare les diffé-

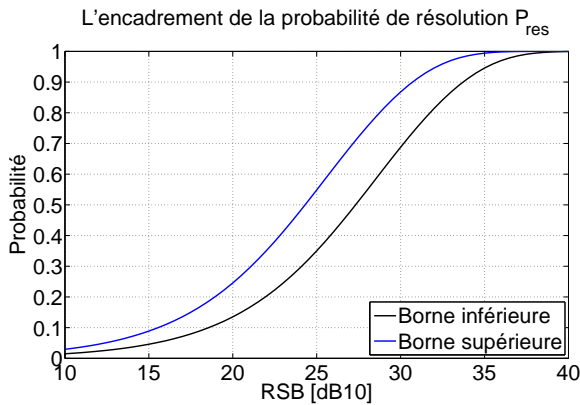


FIGURE 1 – Encadrement de la probabilité de résolution en fonction du RSB à l'aide de la relation (6) avec $s = 2$.

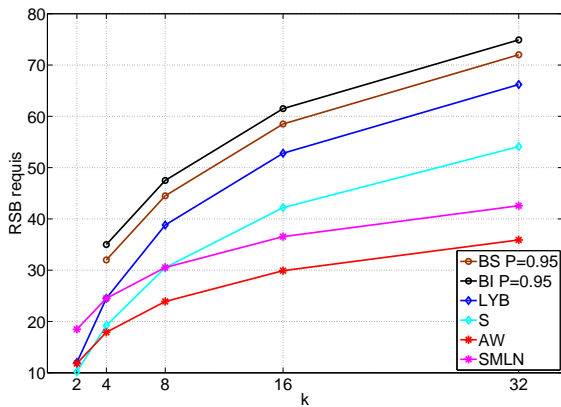


FIGURE 2 – Le RSB minimal requis pour la résolution de deux sources proches séparées de $\delta = \frac{1}{kN}$ avec $N = 32$ et $k \in \{2, 4, 8, 16, 32\}$

rents critères de résolution. Plus précisément, nous donnons les RSB minimaux requis pour une résolution limite δ pour le cri-

ère de résolution de Lee-Yau-Bressler (noté LYB) [3, 4], pour le critère de Smith (noté S) [5], pour le critère de Shahram-Milanfar (noté SM) [6] obtenue avec une probabilité de détection $P_d = 0.95$ et une probabilité de fausse alarme $P_d = 0.1$, pour le critère de Amar-Weiss (noté AW) [7] obtenue avec une probabilité de détection $P_d = 0.95$ et pour les bornes inférieures BI et supérieures BS de notre critère de résolution avec une probabilité de résolution de 0.95 (BI $P = 0.95$, BS $P = 0.95$).

Nous remarquons que, parmi tous les critères mentionnés, notre critère de résolution est le plus exigeant dans le sens où il nécessite un RSB important. Par le fait que notre critère restreint les estimées à appartenir à un volume hyper-rectangle avec probabilité P_{res} . Notre critère permet ainsi de résoudre les paramètres mais aussi d'évaluer la précision de l'estimateur contrairement aux critères de résolution classiques qui se focalisent que sur la résolubilité du problème.

5 Conclusion

Nous avons proposé un critère de résolution qui permet de caractériser les performances en résolution d'un estimateur en présence de plusieurs paramètres. Nous avons illustré l'applicabilité de notre critère de résolution sur un problème de localisation de sources où nous avons mis le lien entre le RSB minimal permettant de séparer les sources et la distance séparant les sources.

Références

- [1] H. Cox, "Resolving power and sensitivity to mismatch of optimum array processors," *The Journal of the acoustical society of America*, vol. 54, no. 3, pp. 771–785, Aug. 1973.
- [2] K. Sharman and T. S. Durrani, "Resolving power of signal subspace methods for finite data lengths," in *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, vol. 1, Apr. 1985, pp. 1501–1504.
- [3] H. Lee, "The cramer-rao bound on frequency estimates of signals closely spaced in frequency," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 6, pp. 1507–1517, Jun. 93.
- [4] S. F. Yau and Y. Bresler, "Worst case cramer-rao bounds for parametric estimation of superimposed signals with applications," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 12, pp. 2973–2986, Dec. 1992.
- [5] S. T. Smith, "Statistical resolution limits and the complexified Cramér-Rao bound," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 5, pp. 1597–1609, May 2005.
- [6] M. Shahram and P. Milanfar, "Imaging below the diffraction limit : a statistical analysis," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 13, no. 5, pp. 677–689, May 2004.
- [7] A. Amar and A. J. Weiss, "Fundamental limitations on the resolution of deterministic signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 11, pp. 5309–5318, Nov. 2008.
- [8] S. G. Oh and R. L. Kashyap, "A robust approach for high resolution frequency estimation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, no. 3, pp. 627–643, Mar. 1991.
- [9] M. P. Clark, "On the resolvability of normally distributed vector parameter estimates," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 12, pp. 2975–2981, Dec. 1995.
- [10] B. K. Shah and C. G. Khatri, "Distribution of a definite quadratic form for non-central normal variates," *The Annals of Mathematical Statistics*, pp. 883–887, 1961.
- [11] R. J. Muirhead, *Aspects of multivariate statistical theory*. New Jersey, USA : John Wiley & Sons, 2009.
- [12] A. Genz, "Numerical computation of multivariate normal probabilities," *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol. 1, no. 2, pp. 141–149, 1992.
- [13] A. Renaux, P. Forster, E. Chaumette, and P. Larzabal, "On the high-SNR conditional maximum-likelihood estimator full statistical characterization," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 12, pp. 4840–4843, Dec. 2006.