

# Bornes bayésiennes pour l'estimation dynamique de phase

S. BAY<sup>1</sup>, C. HERZET<sup>2</sup>, J.M. BROSSIER<sup>3</sup>, J.P. BARBOT<sup>1</sup>, A. RENAUX<sup>4</sup>, B. GELLER<sup>1</sup>

<sup>1</sup>SATIE, ENS Cachan, UniverSud,  
61 Avenue du Président Wilson, F-94230 Cachan, France

<sup>2</sup>UC Berkeley, Dept. of EECS, Berkeley, Wireless Foundations,  
273 Cory Hall, Berkeley, CA 94720, USA

<sup>3</sup>LIS, ENSIEG,  
961 Av. de la houille blanche, Domaine Universitaire BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères, France

<sup>4</sup>Washington University in St. Louis,  
Campus Box 1127, One Brookings Drive, St. Louis, Missouri 63130, USA.

{bay,barbot,geller}@satie.ens-cachan.fr,  
herzet@eeecs.berkeley.edu, jean-marc.brossier@lis.inpg.fr, renaux@ese.wustl.edu

**Résumé** – Dans cette contribution, nous présentons le calcul de la Borne de Cramér-Rao Bayésienne (BCRB) relative au cas de l'estimation d'un vecteur de phase. Le scénario étudié est celui d'une transmission de type MDP2 non-codée dont l'erreur de phase suit un modèle de Wiener. Deux stratégies d'estimation sont envisagées : la première est basée sur un traitement "hors-ligne" alors que la seconde utilise un traitement "en-ligne". Une expression analytique de la BCRB "hors-ligne" et "en-ligne" est fournie. Tirant profit de cette expression, nous en étudions les propriétés asymptotiques en termes de RSB et de nombre d'observation.

**Abstract** – In this paper, we derive a closed-form expression of a Bayesian Cramér-Rao Bound (BCRB) for the estimation of a phase offset vector. We consider the scenario of an uncoded AWGN BPSK transmission and a Wiener phase-offset model. We provide an analytical expression of this bound in both the so-called *off-line* and *on-line* contexts. Taking benefit from the derived BCRB expression, we study its asymptotic behavior in terms of SNR and number of observations.

## 1 Introduction

Les performances des systèmes de communications numériques sont fortement liées à la qualité de la synchronisation effectuée en tête de réception. Les performances optimales qu'atteindrait un estimateur efficace peuvent être données par la famille des bornes de Cramér-Rao. Dans le cadre d'une poursuite de phase, les paramètres à estimer ne sont plus déterministes, et une approche Bayésienne est nécessaire. La borne de Cramér-Rao Bayésienne est alors adaptée à ce problème. Des BCRBs associées à des problèmes d'estimation de la phase d'une porteuse évoluant au cours du temps ont déjà fait l'objet de travaux, voir en particulier Brossier *et al.* [1] et Dauwels *et al.* [3].

Dans cette contribution, nous étudions le cas d'une transmission en Modulation De Phase binaire (MDP2) non-codée subissant un décalage de phase modélisé par un modèle de Wiener. Nous présentons dans un premier temps les calculs permettant d'obtenir la BCRB dans le cadre d'une estimation de type "hors-ligne". Une expression analytique de la BCRB est alors fournie. Il est à noter que dans ce contexte, les résultats présentés par [3] étaient numériques. Les propriétés asymptotiques de l'expression analytique de la BCRB sont ensuite étudiées dans le cas de faibles et forts Rapports Signal à Bruit (RSB). Une estimation de type "en-ligne" étant un cas particulier de

l'estimation "hors-ligne", les résultats de la BCRB obtenus pour un scénario "hors-ligne" seront transposés au cas "en-ligne", complétant ainsi les résultats obtenus par [1]. Enfin, les propriétés de la BCRB dans le cas d'un nombre infini d'observations sont étudiées.

## 2 Modèles

Le système de transmission numérique considéré émet une séquence de symboles modulés en phase MDP2  $\mathbf{a} = [a_0 a_1 \dots a_{K-1}]^T$ . Cette séquence est affectée par une erreur de phase évoluant dans le temps et est perturbée par un Bruit Additif Blanc Gaussien (BABG). En supposant que le signal reçu ait été idéalement filtré et échantillonné à l'instant optimal, le signal à temps discret en bande de base résultant peut s'écrire :

$$y_k = a_k e^{j\theta_k} + n_k \quad \text{avec } k = 1, 2, \dots, K \quad (1)$$

où  $\theta_k$  est l'erreur de phase affectant  $y_k$  et  $n_k$  est un bruit blanc Gaussien circulaire à moyenne nulle et de variance connue  $\sigma_n^2$ , de telle sorte que le RSB est lié au rapport  $E_b/N_0$  par  $\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{\sigma_n^2}$ . La transmission est supposée sans codage, à symboles indépendants et identiquement distribués (*i.i.d*) avec  $Pr(a_k = \pm 1) = \frac{1}{2}$ . Le déphasage est décrit par un modèle de Wiener, *i.e.*,

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \omega_k, \quad (2)$$

avec  $\omega_k$  un bruit Gaussien à moyenne nulle *i.i.d.* et de variance connue  $\sigma_\omega^2$ .

Par la suite, les écarts de phase aux différents instants d'échantillonnage seront regroupés dans le vecteur  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_K]^T$  et les observations dans le vecteur  $\mathbf{y} = [y_1 y_2 \cdots y_K]^T$ .

Deux stratégies d'estimation sont traditionnellement envisagées. La première, que nous appellerons "hors-ligne," attend l'acquisition d'un bloc complet de  $K$  observations pour estimer  $\theta_k$ , avec  $k = 1, 2, \dots, K$ . La stratégie "en-ligne" garde quant à elle en mémoire le vecteur d'observations passées  $[y_1 y_2 \cdots y_{K-1}]^T$  et attend l'acquisition de l'observation courante  $y_K$  pour réaliser l'estimation de  $\theta_K$ .

### 3 Expression de la BCRB "hors-ligne"

Van Trees [5] a montré que l'EQM globale de tout estimateur  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y})$  était borné par l'inverse de la Matrice d'Information Bayésienne (MIB), notée ici  $\mathbf{B}$ , de la manière suivante :

$$E_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}} \left[ \left( \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\theta} \right) \left( \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\theta} \right)^T \right] \geq \mathbf{B}^{-1}. \quad (3)$$

La MIB peut être écrite comme une fonction de la Matrice d'Information de Fisher  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$  comme suit

$$\mathbf{B} = E_{\boldsymbol{\theta}} [\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})] + E_{\boldsymbol{\theta}} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{\theta}} \log p(\boldsymbol{\theta}) \right], \quad (4)$$

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = E_{\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}} \left[ -\Delta_{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{\theta}} \log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \right], \quad (5)$$

avec  $\Delta_{\boldsymbol{\psi}}^{\boldsymbol{\mu}}$  l'opérateur de dérivée partielle du second ordre, c'est à dire  $\left[ \Delta_{\boldsymbol{\psi}}^{\boldsymbol{\mu}} \right]_{k,l} = \frac{\partial^2}{\partial \psi_k \partial \psi_l}$ .

Le premier terme de (4) peut être interprété comme l'information fournie par les observations  $\mathbf{y}$  moyennée par rapport à  $\boldsymbol{\theta}$ , et le dernier terme comme l'information disponible fournie par la connaissance *a priori* sur  $\boldsymbol{\theta}$ , *i.e.*  $p(\boldsymbol{\theta})$ . Ce terme tient compte de la dépendance en temps des écarts de phase à différents instants.

A partir du modèle d'observation (1) et du modèle du bruit de phase (2), la MIB peut s'écrire [2] :

$$\mathbf{B}_K = b \begin{pmatrix} A+1 & 1 & & & & \\ & 1 & A & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & A & 1 \\ & & & & 1 & A+1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

avec  $A$  et  $b$  donnés par  $A \triangleq -\sigma_\omega^2 J_D - 2$ ,  $b \triangleq -1/\sigma_\omega^2$ ,

$$J_D \triangleq E_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}} \left[ -\frac{\partial^2 \log p(y_k | \theta_k)}{\partial \theta_k^2} \right], \quad (7)$$

et si, comme dans [2], nous fixons  $E_{\theta_1} \left[ \frac{\partial^2 \log p(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} \right] = 0$ , ce qui correspond au cas où il n'y a pas d'information *a priori* sur  $\theta_1$ .

La matrice  $\mathbf{B}_K$  ainsi obtenue étant une matrice creuse tridiagonale, possédant des symétries, le  $k^{\text{ième}}$  élément diagonal de  $\mathbf{B}_K$  peut s'exprimer sous la forme :

$$\left[ \mathbf{B}_K^{-1} \right]_{k,k} = \frac{1}{|\mathbf{B}_K|} \left[ \rho_1^2 (b+r_1)^2 r_1^{K-3} + \rho_2^2 (b+r_2)^2 r_2^{K-3} - \frac{b^2}{A-2} (r_1^{k-2} r_2^{K-k-1} + r_1^{K-k-1} r_2^{k-2}) \right] \quad (8)$$

avec les notations suivantes :

$$r_1 = \frac{b}{2} \left( A + \sqrt{A^2 - 4} \right), \quad r_2 = \frac{b}{2} \left( A - \sqrt{A^2 - 4} \right), \quad (9)$$

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{A^2 - 4} + A}{2\sqrt{A^2 - 4}}, \quad \rho_2 = \frac{\sqrt{A^2 - 4} - A}{2\sqrt{A^2 - 4}}. \quad (10)$$

Le détail des calculs de  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  et  $|\mathbf{B}_K|$  sont donnés en annexe, voir (section A).

### 4 Evaluation de $J_D$ et cas asymptotiques

Dans cette section, la mise en oeuvre pratique du calcul de la BCRB est décrite. Les approximations à faible et fort RSB de la BCRB sont également introduites, offrant une alternative intéressante à l'évaluation de (8).

#### 4.1 Evaluation de la BCRB

D'après (8), le calcul de la BCRB nécessite l'évaluation de  $J_D$ . Du fait de la nature Gaussienne du bruit et de l'équiprobabilité des symboles  $a_k$ , le terme intervenant dans l'expression de  $J_D$  se réécrit :

$$\frac{\partial^2 \log p(y_k | \theta_k)}{\partial \theta_k^2} = -\frac{2}{\sigma_n^2} \Re(x_k) \tanh\left(\frac{2}{\sigma_n^2} \Re(x_k)\right) + \frac{4}{\sigma_n^4} \Im^2(x_k) \left[ 1 - \tanh^2\left(\frac{2}{\sigma_n^2} \Re(x_k)\right) \right], \quad (11)$$

avec  $x_k = y_k e^{-j\theta_k}$ . Malheureusement, dans le cas général,

l'espérance de (11), par rapport à  $p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$  n'a pas de solution analytique évidente.  $J_D$  peut toutefois être évaluée par des méthodes d'intégration numérique.

#### 4.2 Asymptote à fort RSB

A fort RSB, la fonction  $\tanh(\cdot)$  intervenant dans (11) peut être approximée par  $\tanh\left(\frac{2}{\sigma_n^2} \Re(x_k)\right) \approx \text{sign}(\Re(x_k))$ , d'où :

$$J_D \approx \frac{2}{\sigma_n \sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\sigma_n^2}} + \frac{2}{\sigma_n^2} \text{erf}\left(\frac{1}{\sigma_n}\right), \quad (12)$$

et ainsi,  $\lim_{\sigma_n^2 \rightarrow 0} J_D = 2/\sigma_n^2$ . En remplaçant  $J_D$  par sa limite dans (8), l'asymptote à fort RSB de la BCRB est obtenue.

#### 4.3 Asymptote à faible RSB

Par un développement de Taylor au premier ordre de  $\tanh(z)$  autour de  $z = 0$ , l'équation (11) devient :

$$\frac{\partial^2 \log p(y_k | \theta_k)}{\partial \theta_k^2} \approx -\left(\frac{2}{\sigma_n^2} \Re(x_k)\right)^2 + \left(\frac{2}{\sigma_n^2} \Im(x_k)\right)^2, \quad (13)$$

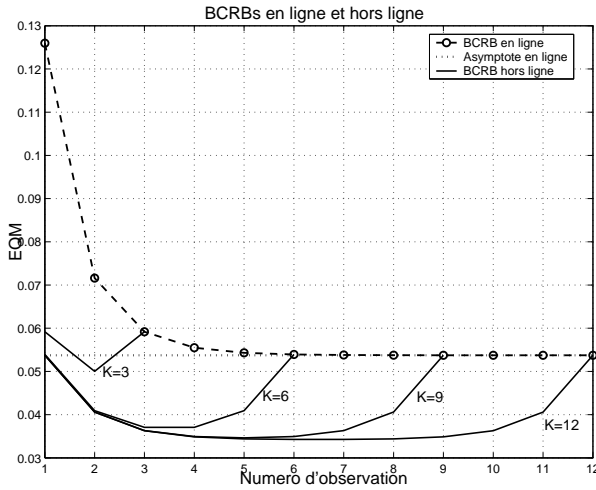


FIG. 1 – BCRBs “hors-ligne” et “en-ligne” pour  $\sigma_\omega^2 = 0.04 \text{ rad}^2$ ,  $\sigma_n^2 = 0.25$  et pour différentes longueurs de blocs d’observation  $K$  ( $10^5$  tirages de Monte-Carlo)

d’où  $J_D$  :  $J_D \approx \frac{4}{\sigma_n^2}$ . En insérant ce résultat dans l’équation (8), nous obtenons l’asymptote à faible RSB de la BCRB. Il est intéressant de remarquer que  $J_D$  ne dépend que du bruit d’observation et est indépendant du modèle de phase.

## 5 BCRB pour une estimation “en ligne”

Dans le cas d’une estimation “en-ligne”, le récepteur utilise les échantillons précédemment acquis et l’observation courante  $y_K$  pour estimer  $\theta_K$ . Une borne de Cramér-Rao *a posteriori* (“en ligne”) a été obtenue par Tichavsky *et al.* dans [4]. Ces auteurs ont proposé une méthode permettant la mise à jour de la MIB de l’indice temporel  $k$  à l’indice  $k + 1$ . Cette technique a également été appliquée dans [1] pour le modèle d’observations décrit par les équations (1) et (2). Partant des résultats des sections précédentes, une expression alternative de la BCRB “en ligne” peut être obtenue. En effet, la BCRB “en ligne” associée au vecteur d’observation  $\mathbf{y} = [y_1 y_2 \dots y_K]^T$  est simplement égale à l’élément  $(K, K)$  de l’inverse de la MIB, *i.e.*,

$$[\mathbf{B}_K^{-1}]_{K,K} = \frac{1}{|\mathbf{B}_K|} \left[ \rho_1^2 (b + r_1)^2 r_1^{K-3} + \rho_2^2 (b + r_2)^2 r_2^{K-3} - \frac{b^2}{A-2} (r_1^{K-2} r_2^{-1} + r_1^{-1} r_2^{K-2}) \right]. \quad (14)$$

L’asymptote de la BCRB “en ligne” quand le nombre

d’observations tend vers l’infini, voir en annexe (section B), s’écrit alors :

$$\lim_{K \rightarrow \infty} [\mathbf{B}_K^{-1}]_{K,K} = \frac{-\sigma_\omega^2 + \sqrt{\sigma_\omega^4 + 4 \frac{\sigma_n^2}{J_D}}}{2} \quad (15)$$

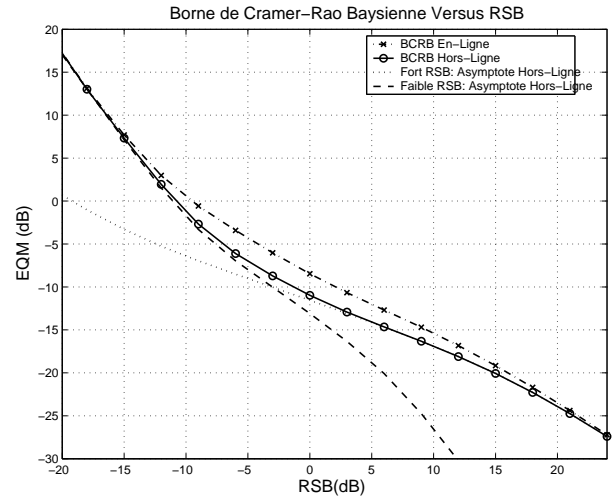


FIG. 2 – BCRBs “hors-ligne” et “en-ligne” pour  $\sigma_\omega^2 = 0.04 \text{ rad}^2$ ,  $\sigma_n^2 = 0.25$  et pour  $K = 50$  ( $J_D$  évalué grâce à  $10^5$  tirages de Monte-Carlo)

## 6 Simulations

Les différentes bornes d’estimation obtenues sont présentées en fonction du RSB et du nombre d’observations. Le premier cas étudié est celui d’une transmission perturbée par un BABG avec  $\sigma_n^2 = 0.25$  et un bruit de phase  $\sigma_\omega^2 = 0.04 \text{ rad}^2$ . Sur la Figure 1 sont représentées, en fonction de l’indice temporel, les BCRBs “en-ligne” et “hors-ligne” pour plusieurs longueurs de bloc d’observations. Dans un contexte “hors-ligne”, les meilleures performances d’estimation pouvant être atteintes se situent en milieu de bloc (ce résultat peut-être prouvé en étudiant (8)). Dans le cas d’une estimation à l’indice  $\lfloor \frac{K+1}{2} \rfloor$ , l’estimateur tire parti de façon égale des demi-blocs d’observations précédant et suivant. Concernant maintenant l’estimation “en-ligne”, au début du processus et lorsque le numéro d’observation augmente, l’estimateur prend en compte plus d’informations et de ce fait les performances d’estimation s’améliorent. Ainsi la borne décroît et converge vers son asymptote à fort nombre d’observation (15) : les performances de cette stratégie d’estimation se trouvent donc limitées par le bruit de phase et d’observation, indépendamment du numéro d’observation.

Considérons maintenant un bloc de  $K = 50$  symboles MDP2, perturbés par un bruit de phase  $\sigma_\omega^2 = 0.04 \text{ rad}^2$ . La Figure 2 représente les BCRBs obtenues d’une part pour  $K = 50$  dans le cas “en-ligne” et pour une estimation en milieu de bloc ( $k = 25$ ) dans le cas “hors-ligne”. Dans ce dernier cas, les asymptotes de la BCRB à faible et fort RSB sont également représentées. Notons que ces asymptotes, bien plus simples à calculer, fournissent de bonnes approximations de la BCRB dans leur domaine de validité respectif. Notons enfin que la BCRB “hors-ligne” est généralement inférieure à la BCRB “en-ligne”. Dans le cas d’un fort RSB, les deux bornes sont proches : l’information fournie par l’observation courante est suffisamment précise et devient prépondérante sur la connaissance *a priori* de  $\theta$ . Les bornes “en-ligne” et “hors-ligne” deviennent donc équivalentes.

## 7 Conclusion

Dans cette contribution, nous avons obtenu, pour une transmission MDP2 non-codée et un modèle de perturbation de phase de type Wiener, une expression analytique de la BCRB pour les stratégies d'estimation "hors-ligne" et "en-ligne". Tirant profit de ces calculs, nous avons fourni les asymptotes à faible et fort RSB pour la BCRB "hors-ligne", ainsi que l'asymptote relative au nombre d'observations d'une stratégie d'estimation "en-ligne". A partir de ces résultats, nous avons pu comparer les performances ultimes et les propriétés des stratégies d'estimation "en-ligne" et "hors-ligne".

## A Eléments Diagonaux de la BCRB

Dans cette annexe, nous détaillons le calcul des éléments diagonaux (8) de l'inverse de la MIB (6). Pour cela nous utilisons la technique classique d'inversion de matrice

$$[\mathbf{B}_K^{-1}]_{k,k} = C_{k,k} |\mathbf{B}_K|^{-1}, \quad (16)$$

avec  $C_{k,k}$  le cofacteur de l'élément  $[\mathbf{B}_K]_{k,k}$  et  $|\mathbf{B}_K|$  le déterminant de  $\mathbf{B}_K$ . Il convient donc de calculer ce cofacteur et  $|\mathbf{B}_K|$ .

- Calcul préliminaire. Soit  $d_k$ , le déterminant de la matrice suivante  $k \times k$

$$D_k = b \begin{pmatrix} A & 1 & & & \\ 1 & A & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & A & 1 \\ & & & & & 1 & A \end{pmatrix}.$$

En développant  $d_k$  suivant la première et la seconde colonne, il vient  $d_k = bAd_{k-1} - b^2d_{k-2}$  avec  $d_0 = 1$  et  $d_1 = bA$ .  $\{d_k\}$  est ainsi une récurrence. En utilisant le terme initial, une expression analytique de  $d_k$  est donnée par

$$d_k = \rho_1 (r_1)^k + \rho_2 (r_2)^k \quad \text{for } k \in \mathbb{N}, \quad (17)$$

avec  $\rho_1, \rho_2, r_1$  et  $r_2$  définis par (9) et (10).

- Déterminant  $|\mathbf{B}_K|$ . Dans un premier temps, en développant  $|\mathbf{B}_K|$  suivant la première colonne, nous obtenons la somme de deux cofacteurs qui sont alors développés suivant la dernière colonne. En agissant ainsi, nous obtenons que  $|\mathbf{B}_K| = b(A+2)d_{K-1}$ .
- Cofacteur  $C_{k,k}$ . Le cofacteur  $C_{k,k}$  correspond au déterminant de la matrice  $\mathbf{B}_k$  dans laquelle la ligne  $k$  et la colonne  $k$  ont été supprimées. La matrice ainsi obtenue est bloc diagonale. Le bloc supérieur (respectivement inférieur) est noté  $\mathbf{U}_{\mathbf{B}_K}$  (respectivement  $\mathbf{L}_{\mathbf{B}_K}$ ). Le cofacteur est ainsi le produit de deux déterminants :

$$\begin{aligned} C_{k,k} &= |\mathbf{U}_{\mathbf{B}_K}| |\mathbf{L}_{\mathbf{B}_K}| \\ &= (bd_{k-1} + d_k)(bd_{K-k-2} + d_{K-k-1}). \end{aligned} \quad (18)$$

- Eléments diagonaux. En ré-écrivant (16) et en utilisant (17) et (18), il vient

$$[\mathbf{B}_K^{-1}]_{k,k} = \frac{1}{|\mathbf{B}_K|} \left[ \rho_1^2 (b+r_1)^2 r_1^{K-3} + \rho_2^2 (b+r_2)^2 r_2^{K-3} - \frac{b^2}{A-2} (r_1^{k-1} r_2^{K-k-2} + r_1^{K-k-2} r_2^{k-1}) \right].$$

## B Comportement de la BCRB "en ligne"

En utilisant (16) et (18),  $[\mathbf{B}_K^{-1}]_{K-1,K-1}$  peut s'écrire sous la forme

$$[\mathbf{B}_K^{-1}]_{K-1,K-1} = \frac{A+1}{b(A+2)} - \frac{1}{b(A+2)} u_K, \quad (19)$$

où  $u_n \triangleq \frac{d_n}{bd_{n-1}} = \frac{Au_{n-1}-1}{u_{n-1}}$  avec  $u_1 = A$ . Il est clair que cette séquence est strictement croissante et converge vers  $u_\infty = \frac{1}{2}(A + \sqrt{A^2 - 4})$ . En combinant ce résultat avec (19), nous obtenons que  $[\mathbf{B}_K^{-1}]_{K-1,K-1}$  est une séquence strictement décroissante ayant pour limite :

$$\lim_{K \rightarrow \infty} [\mathbf{B}_K^{-1}]_{K-1,K-1} = \frac{-\sigma_w^2 + \sqrt{\sigma_w^4 + 4\frac{\sigma_w^2}{J_D}}}{2}. \quad (20)$$

## Références

- [1] P.O. Amblard, J.M. Brossier, and E. Moisan. Phase tracking : what do we gain from optimality? Particle filtering versus phase-locked loops. *Elsevier Signal Processing*, 83 :151–167, October 2003.
- [2] S. Bay, C. Herzet, JM. Brossier, JP. Barbot, and B. Geller. Analytic and asymptotic analysis of bayesian Cramér-Rao bound for dynamical phase offset estimation. *Accepted for publication in IEEE Trans. Signal Processing*, available at <http://www.satit.enscachan.fr/ts/fanny/BCRB.pdf>, January 2007.
- [3] J. Dauwels and S. Korl. A numerical method to compute Cramér-Rao-type bounds for challenging estimation problems. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, pages 717–720, Toulouse, Fr, May 2006.
- [4] P. Tichavsky, C. H. Muravchik, and A. Nehorai. Posterior Cramér-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering. *IEEE Trans. Signal Processing*, 46 :1386–1396, May 1998.
- [5] H. L. Van Trees. *Detection, Estimation and Modulation Theory*, volume 1. Wiley, New York, 1968.