Université de Paris-Saclay | 3H
Faculté des sciences d'Orsay | *2023-2024*
L3 E3A | 305 SSL

Partiel

Exercice 1 Spectre et échantillonnage (20 minutes)

Les questions au sein de cet exercice sont indépendantes.

1. Tracer le spectre en énergie d'un signal sinusoïdal continu de $4kHz$ (l'amplitude de la sinusoïde est égale à 1 et la phase à 0). Tracer alors les 5 premières raies (c'est-à-dire 5 raies dans le domaine de fréquences positives et 5 raies dans le domaines des fréquences négatives) du spectre (toujours en énergie) de ce même signal échantillonné à $10kHz$ puis à $6kHz$.

2. Donner $\forall n$ les coefficients complexes c_n de la décomposition en série de Fourier complexe du signal $s(t) = cos(\omega t) + sin(3\omega t) - cos(3\omega t)$. On pose $\omega = 100\pi$ rd/s, quelle est la fréquence du signal $s(t)$ et a quelle fréquence minimale doit on échantillonner le signal $s(t)$ pour pouvoir le reconstruire correctement ?

3. Si f est la fréquence d'un signal sinusoïdal, combien y a t-il de périodes de cette sinusoïde par seconde ? Si cette sinusoïde est échantillonnée à la fréquence d'échantillonnage Fe, combien y a t-il d'échantillons par période de la sinusoïde, et quelle est la relation entre ce nombre d'échantillons par période et la fréquence normalisée $\lambda = f/Fe$? Combien y a t-il d'échantillons par seconde ? Pour que cette sinusoïde soit correctement échantillonnée, quel doit être la valeur maximale de λ ?

4. Si le signal $x(t) = 5sin(80\pi t) + 3sin(160\pi t) + 2sin(320\pi t)$ est échantillonné à une cadence de 140 échantillons par seconde, dire en justifiant précisément si la condition de Shannon est respectée ?

Exercice 2 Transformée de Fourier discrète (30 minutes)

On considère les deux signaux à temps discret (la période d'échantillonnage est supposée égale à 1) suivants $x[n] = \delta[n] + \delta[n-2]$ et $y[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$ où $\delta[n]$ désigne le symbole de Kronecker.

1. Montrer, en justifiant soigneusement, que la transformée de Fourier à temps discret de $x[n]$ s'écrit $\hat{x}(f) = 2cos(2\pi f)\, e^{-2i\pi f}$.

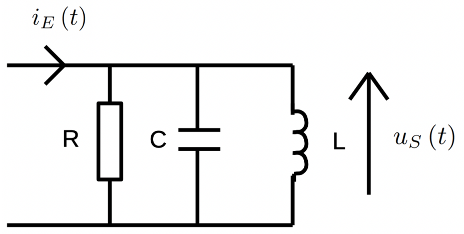
2. Montrer que la transformée de Fourier inverse peut s'écrire $\int_{-1/2}^{1/2} e^{i2\pi fn} df + \int_{-1/2}^{1/2} e^{i2\pi f(n-2)} df$. Retrouvez le signal $x[n]$. Pour cela il est conseillé de traiter séparément les trois cas $n = 0$, $n = 2$ et $n \notin \{0, 2\}$ et de ne pas utiliser la forme polaire.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $1 + z + z^2 = \frac{z^{3/2}}{z^{1/2}} \left(\frac{z^{-3/2} - z^{3/2}}{z^{-1/2} - z^{1/2}} \right)$ et en déduire la valeur de $1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}$ ainsi que la transformée de Fourier à temps discret de $y[n]$.

Exercice 3 Etude d'un circuit bouchon (20 minutes) [1]

Soit le schéma électrique suivant :

1. Les circuits bouchon sont utilisés ont utilisés pour compenser l'impédance d'un circuit à une fréquence spécifique en vue de différentes applications. Par exemple, dans les circuits de réception radio, un circuit bouchon peut être utilisé pour ajuster l'impédance d'une antenne afin d'optimiser la réception à une fréquence particulière. Le circuit bouchon est aussi un élément essentiel des équipements de transmission par courants porteurs sur les lignes (CPL) d'énergie électrique haute et très haute tension. Enfin, les circuits bouchon peuvent également être utilisés pour créer des oscillateurs et des circuits résonnants, où la fréquence de résonance est exploitée pour générer des signaux à des fréquences spécifiques.



Notons $I_E(p)$ et $U_S(p)$ les transformées de Laplace de l'entrée en courant $i_E(t)$ et de la sortie en tension $u_S(t)$, respectivement. Toutes les conditions initiales sont supposées nulles.

1. Démontrer, en justifiant soigneusement, qu'il s'agit d'un système linéaire.

2. Établir la relation entre $I_E(p)$ et $U_S(p)$ sous forme $I_E(p) = T(p)U_S(p)$ où $T(p)$ est une fraction rationnelle que l'on déterminera.

3. Montrer que l'on fabrique un oscillateur sinusoïdale (dont on précisera la pulsation en fonction de L et C) si l'on choisit $R \to \infty$ (on retire la résistance) et que l'on applique une impulsion de Dirac en entrée de ce circuit.

Exercice 4 Convolution discrète (30 minutes)

On considère les deux signaux $x[k]$ et $y[k]$ donnés par : $x[k] = \Pi_4[k-3]$ et $y[k] = \left(\frac{1}{2}\right)^k H[k]$ où $\Pi_N[k]$ est la fonction rectangle (causale) échantillonnée de durée N et $H[k]$ est la fonction échelon unité (Heaviside échantillonné).

1. Représenter graphiquement $x[k]$, $y[k]$, et $y[4-k]$ en fonction de k.

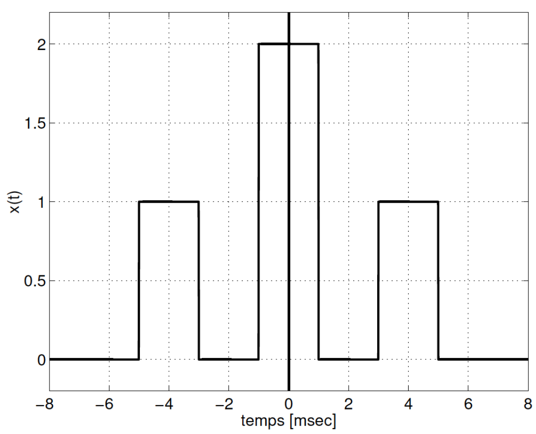
2. Pour une suite géométrique quelconque $u_k = q^k$ de raison $q \neq 1$ et de premier terme égale à 1, démontrer que

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$$

3. Calculer le produit de convolution $z[k] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]\, y[k-l]$ en distinguant les cas $k < 3$, $3 \leq k < 6$ et $k \geq 6$.

Exercice 5 (20 minutes)

À partir de la seule observation du signal temporel $x(t)$ de la figure ci-dessous, calculer la transformée de Fourier de $x(t)$ notée $X(f)$. Précisez ce que vaut sa densité spectrale en $f = 0$ Hz, c'est-à-dire la valeur de $X(0)$.



Exercice 6 Filtrage (30 minutes)

On considère un filtre numérique d'entrée $e[n]$ et de sortie causale $s[n]$ régi par l'équation aux différences $s[n] - 2s[n-1] = e[n]$.

On applique en entrée du filtre un échelon unité (Heaviside échantillonné) d'où $e[n] = H[n]$.

1. Calculer $s[0]$, $s[1]$, et $s[2]$.

2. On considère la suite y définie pour tout entier naturel n par $y[n] = s[n] + 1$. En reliant $y[n+1]$ à $y[n]$, montrer que y est une suite géométrique dont on précisera la raison et en déduire l'expression de y en fonction de n.

3. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de $s[n]$. Vérifier que l'on retrouve les mêmes valeurs de $s[0]$, $s[1]$, et $s[2]$ qu'à la question 1.

4. A partir de l'équation aux différences, calculer la transformée en z, notée $S(z)$, de $s[n]$ (mettre le résultat sous forme de fraction rationnelle).

5. Donner une décomposition en éléments simple de $\frac{S(z)}{z}$.

6. Retrouver le résultat de la question 3 pour l'expression de $s[n]$.

Exercice 7 Série de Fourier (30 minutes)

Soit f la fonction 2π-périodique défini par $f(t) = t^2$ sur $[-\pi, \pi]$.

1. Montrer qu'une décomposition en série de Fourier donne les coefficients $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$ et $b_n = 0$.

2. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.