Université Paris-Saclay L3 E3A
Faculté des Sciences d'Orsay

Signaux et systèmes linéaires

Sujets de TD*

Méthode de travail : l'enseignant n'écrit *a priori* pas la correction au tableau. Le travail est fait par les étudiants, l'enseignant donne les pistes de départ, aide et répond aux questions. La correction est faite au tableau par les étudiants, sous la supervision et avec l'aide de l'enseignant qui peut également apporter tous les compléments qu'il souhaite.

1 Base de Fourier

Soit l'ensemble des signaux définis sur l'intervalle $[0, T]$ dans $\mathbb{C}$ et d'énergie finie $L^2([0, T])$. Cet espace est muni du produit scalaire

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{T}\int_{[0,T]} x(t)y(t)^* \,\mathrm{d}t$$

pour tout couple de signaux (x, y) de $L^2([0, T])$. Dans cet espace, on considère la famille des signaux, avec $n \in \mathbb{Z}$,

$$e_n(t) = e^{2i\pi \frac{n}{T} t}.$$

1. Tracer les parties réelles, imaginaires, les modules et les phases de $e_n(t)$, pour $n = 0, 1, 2$.
2. Montrer que la famille $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormale.
3. En déduire la décomposition des signaux de $L^2([0, T])$ sur cette base. Conclure.

2 Série de Fourier du créneau

On définit le signal c carré et périodique de période T par

$$c(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ t = 0 \quad \text{ou} \quad t = T/2, \\ 1 & \text{si } \ t \in \,]0; T/2[, \\ -1 & \text{si } \ t \in \,]T/2; T[. \end{cases}$$

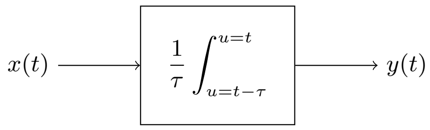
On pose $f = 1/T$. On veut déterminer les composantes spectrales et leur intensité.

1. Calculer les coefficients en série de Fourier de $c(t)$.
2. Tracer sa «représentation spectrale», c'est-à-dire représenter le poids de chacune des composantes en fonction de la fréquence.
3. En appliquant la relation de Parseval, en déduire que
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$
4. Intuitivement, que se passe-t-il si ce signal passe dans un filtre qui élimine toutes les fréquences strictement supérieures à $2f$, en valeur absolue ?

*J.-F. Giovannelli, F. Orieux, M. Kowalski, T. Rodet …

3 Moyennage d'un signal périodique

Soit x un signal périodique de période T. On note $\{c_n[x]\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ses coefficients de Fourier. On injecte ce signal dans un système intégrateur



qui fournit en sortie un nouveau signal y par moyennage temporel sur un horizon $\tau > 0$

$$y(t) = \frac{1}{\tau}\int_{u=t-\tau}^{u=t} x(u)\,\mathrm{d}u.$$

1. Montrer que y peut aussi s'écrire
$$y(t) = \frac{1}{\tau}\int_{u=-\tau}^{u=0} x(t+u)\,\mathrm{d}u$$
et déduire que y est également périodique de période T.
2. Calculer les $c_n[y]$ en fonction de $c_n[x]$. Montrez qu'il existe une suite $\{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que
$$c_n[y] = H_n c_n[x], \forall n \in \mathbb{Z}$$
et étudier sommairement la fonction H.
3. Que se passe-t-il dans le cas particulier où l'horizon de moyennage est égal à la période du signal *i.e.,* si $\tau = T$?

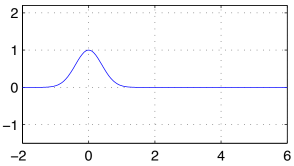
4 Transformée de Fourier des doubles exponentielles

Soit $x(t) = e^{-\alpha|t|}$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

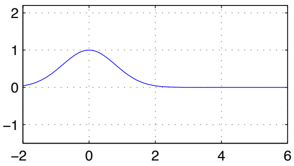
1. Calculer $\hat{X}(\nu)$ la transformée de Fourier de $x(t)$.
2. Vérifiez les propriétés de symétrie de X. Vérifiez également que
$$\int_{\mathbb{R}} X(\nu)\,\mathrm{d}\nu = x(0) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} x(t)\,\mathrm{d}t = X(0)$$
en exploitant $\int_{\mathbb{R}}(1+u^2)^{-1}\,\mathrm{d}u = \pi$.
3. Calculer Δ_t et Δ_ν les largeurs à mi-hauteur de $x(t)$ et $X(\nu)$. Commenter.

5 Quiz des téhef

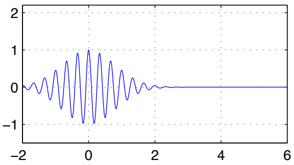
Quatre signaux s_1 à s_4 sont obtenus par transformations simples du signal s_0.



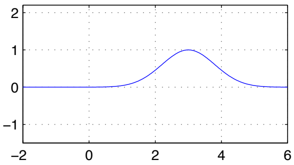
s_0



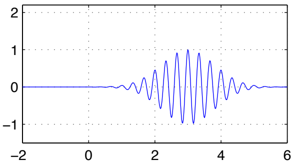
s_1



s_2



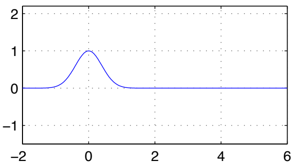
s_3



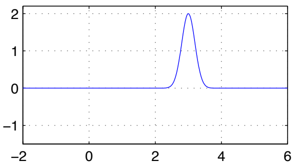
s_4

1. Identifier les transformations de s_0 conduisant aux signaux s_1 à s_4.

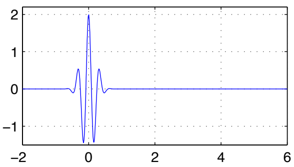
Leur transformée de Fourier [1], S_b à S_e, sont illustrées *dans le désordre*, avec S_a la transformée de s_0.



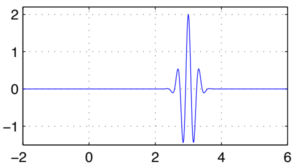
S_a



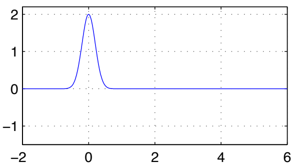
S_b



S_c



S_d



S_e

2. Reformer les couples (s_i, S_j), *i.e.*, retrouver la transformée de Fourier des signaux s_1, s_2, s_3, s_4 parmis S_b, S_c, S_d, S_e.

6 Systèmes

Que pouvez vous dire dire, dans chacun des cas suivants, concernant la linéarité, l'invariance et la causalité de la relation entre l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$, avec $\tau \geq 0$.

1. $$s(t) = \sin(t)e(t)$$

2. $$s(t) = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} a_{i,j} e(t - iT)e(t - jT)$$

3. $$s(t) = A\sin(e(t - \tau))$$

4. $$s(t) = \int_{t-T}^{t} \sin(e(t) + \theta)\,\mathrm{d}\theta$$

5. $$s(t) = \int_{\mathbb{R}} e(u)h(t - u)\,\mathrm{d}u$$

6. $$s(t) = \int_{\mathbb{R}} e(u)h(t, u)\,\mathrm{d}u$$

[1]. Certaines transformées sont complexes mais seule la partie réelle est représentée pour alléger les figures.

7 Quiz des convolutions

Tracer sans calcul les convolutions suivantes.

— Une porte carré de largeur 1 avec un Dirac en 0.

— Une porte carré de largeur 1 avec un Dirac en 2.

— Une porte carré de largeur 1 avec un peigne de Dirac de période 2. Que ce passe-t-il si la période du peigne de Dirac est de 0,5.

— Un sinus de période 2π avec une porte carré de taille 2π.

8 Analyse spectrale

On mesure $N = 100$ échantillons d'un signal s durant une seconde, puis on effectue la TFD du signal échantillonné s_k, illustrée figure 1. Donner les expressions théoriques des signaux s_k et s.

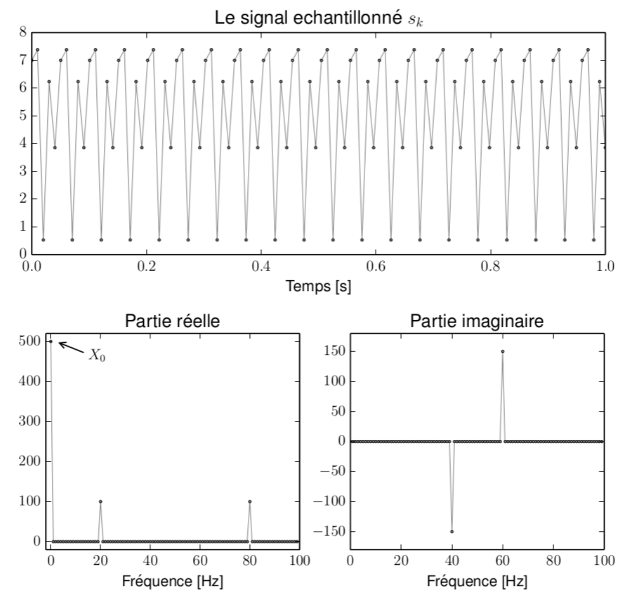


FIGURE 1 – Le signal échantillonné s_k et les parties réelles et imaginaires de la TFD.

9 Transformée en z d'un sinus

Soit s_e le signal numérique issue de l'échantillonnage, à la période T_e d'un sinus causal

$$s(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) & \text{pour} \quad t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Donner la transformée en z de $a^n u_n$, où $a \in \mathbb{C}$ et u_n l'échelon.

Remarque 1. *La suite $s_n = a^n u_n$ est l'exponentielle complexe numérique causal.*

2. Donner la transformée en z de s_e.

10 Transformée en z de la double exponentielle

On considère la famille des signaux exponentiel ou géométrique, à temps discret, définies comme

$$x_n^\alpha = \alpha^{|n|}, \ \forall n \in \mathbb{Z} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Comment varie le signal x^α avec α ? Représenter le pour différentes valeurs de α.
2. Calculer la transformée en z de x^α. Préciser la région de convergence.
3. Pour quelles valeurs de α le signal est-il stable ? Donner, dans ce cas, sa transformée de Fourier à temps discret.

11 Transformée en z inverse d'une fraction rationnelle d'ordre 1

On s'intéresse à l'inversion de la fraction rationnelle d'ordre 1

$$H(z) = \frac{1}{z-a} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la suite $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ dont H est la transformée en z. On distinguera deux cas selon la région de convergence considérée.
2. Donner, dans chaque cas, la condition de stabilité pour H. Dans les cas stables, donner la transformée de Fourier $H(i\omega)$ de $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Donner également le module au carré de $H(i\omega)$.

12 Transformée en z inverse d'une fraction rationnelle d'ordre 2

On s'intéresse à l'inversion de la fraction rationnelle d'ordre 2

$$H(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad a < b.$$

1. Déterminer la suite $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ dont H est la transformée en z. On considérera uniquement le cas où la suite est causale.
2. Donner la condition de stabilité pour H. Dans les cas stables, donner la transformée de Fourier $H(\omega)$ de $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Donner également le module au carré de $H(\omega)$.

13 étude d'un filtre donné par une équation aux différences

On considère le filtre causal défini par la relation d'entrée-sortie suivante :

$$s[n] = 2s[n-1] + 4e[n] + 3e[n-1], \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

où $e[n]$ est l'entrée et $s[n]$ la sortie.

1. Déterminez $H(z)$ la fonction de transfert en z de ce filtre.
2. Déduisez-en $h[n]$ sa réponse impulsionnelle.
3. Étudiez la stabilité du filtre.
4. Déterminez, si elle existe, la réponse en fréquence $H(\nu)$.

14 Filtre intégrateur à temps discret

Soit le filtre défini par la relation suivante

$$s_n = \frac{1}{2}(e_n + e_{n-1}), \forall n \in \mathbb{Z}$$

avec e l'entrée et s la sortie.

1. Le filtre est-il linéaire, invariant, causal ? Argumenter brièvement.
2. Déterminer sa réponse impulsionnelle. Le filtre est-il stable ?
3. Déterminez et représentez $|H(i\omega)|$ le gain en fréquence. Le filtre est-il passe haut, passe bas, passe bande ?
4. Calculez la sortie lorsque le signal en entré est
$$e_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \ \ n \in \{0, \dots, N\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
5. Le signal en entré est maintenant
$$e_n = ae^{2i\pi f n}$$
avec $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathbb{R}$. Calculer la sortie du filtre. Quelle est la fréquence en sortie ? Commenter.

15 Loi d'entrée-sortie et réponse impulsionnelle

On considère un système d'entrée e et de sortie s dont la relation d'entrée-sortie est donnée par

$$T\dot{s}(t) + s(t) = G_0 e(t), \tag{2}$$

où T et G_0 sont des constantes réelles positives et $t \in \mathbb{R}$ le temps.

1. Quelle est la nature de la loi d'entrée-sortie décrite par (2) ? Quelles sont les dimensions de T et de G_0 sachant que s et e n'ont pas forcément la même unité ?
2. Passer la loi d'entrée-sortie dans l'espace de Fourier. En déduire la réponse en fréquence $H(\nu) = \frac{S(\nu)}{E(\nu)}$ associée à ce système.
3. Soit $u(t)$ l'échelon unitaire ou fonction de Heaviside définie par
$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \ \ t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Calculer la TF de $f(t) = e^{-at}u(t)$ avec $a > 0$.
4. En comparant les résultats des questions 2 et 3, donner l'expression de la réponse impulsionnelle $h = \mathcal{F}^{-1}[H]$ et tracer son graphe.
5. Expliquer pourquoi les constantes T et G_0 sont appelées respectivement constante de temps et gain statique du système.