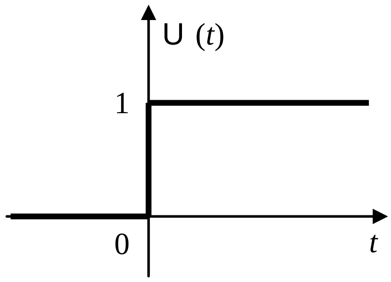
LES SIGNAUX "ÉLÉMENTAIRES" UTILISÉS EN PHYSIQUE

♦ ÉCHELON UNITÉ (ou fonction de Heaviside) : U(t)



- **Définition** : $\begin{cases} \text{U}\,(t) = 0 \quad si \quad t < 0 \\ \text{U}\,(t) = 1 \quad si \quad t \geq 0 \end{cases}$

Remarque : parfois, on définit $\text{U}\,(t) = \frac{1}{2} \quad si \quad t = 0$

Autres notations existantes : H(t) ou Γ(t) à cause la forme de la courbe évoquant la lettre grecque

- **Utilisation :** Sert à "modéliser" les signaux qui s'établissent "instantanément" à partir d'un instant donné, en particulier les signaux "causaux" (càd nuls si t < 0)

♦ SIGNAL RECTANGULAIRE (ou fonction porte) : Π(t)

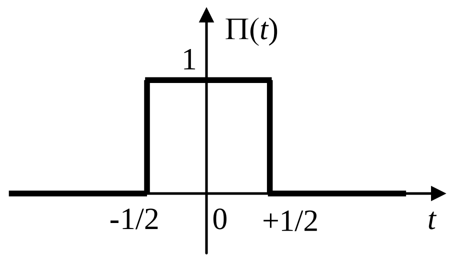
- **Définition** : $\begin{cases} \Pi(t) = 0 \quad si \quad |t| > \frac{1}{2} \\ \Pi(t) = 1 \quad si \quad |t| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

Remarques

* Parfois, on définit $\Pi(t) = \frac{1}{2} \quad si \quad |t| = \frac{1}{2}$

* On peut aussi écrire :

$$\Pi(t) = \text{U}\,(t + \frac{1}{2}) - \text{U}\,(t - \frac{1}{2})$$



C'est une "porte'" ou une "fenêtre" **centrée en 0 et de largeur 1**.

- Plus généralement $\Pi(\frac{t-a}{T}) = \Pi_T(t-a)$

est la **porte centrée en a et de largeur T**

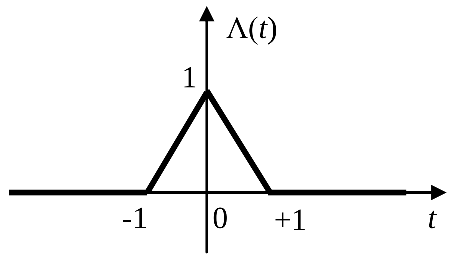
- **Utilisation :** Sert à "isoler" une partie intéressante d'un signal.

♦ SIGNAL TRIANGULAIRE : Λ(t)

- **Définition** : $\begin{cases} \Lambda(t) = 0 \quad si \quad |t| \geq 1 \\ \Lambda(t) = 1 - |t| \quad si \quad |t| \leq 1 \end{cases}$

- Plus généralement $\Lambda(\frac{t-a}{T}) = \Lambda_T(t-a)$

est le **triangle de hauteur 1, centré en a et de largeur 2T**



C'est un "triangle" de **hauteur 1, centré en 0 et de largeur 2**

♦ SIGNAL HARMONIQUE (ou sinusoïdal pur)

- **Définition** :

$$s(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} A > 0 : \text{amplitude} \\ \omega > 0 : \text{pulsation (en rad/s)} \\ -\pi < \varphi < \pi : \text{phase à l'origine} \end{cases} \qquad \begin{cases} T = \frac{2\pi}{\omega} : \text{période (en s)} \\ f = \frac{1}{T} : \text{fréquence (en Hz)} \end{cases}$$

- Signal **complexe** associé : $z(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi)} \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

IMPORTANT : cette écriture complexe sous-entend l'existence de fréquences NÉGATIVES, sans réalité "physique" pour des signaux réels. Par conséquent, pour un signal réel, il faudra **systématiquement associer** chaque fréquence positive à la fréquence négative correspondante.

SPECTRE d'un SIGNAL PÉRIODIQUE

Série de Fourier : $\boxed{f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)}$

♦ REPRÉSENTATIONS TEMPORELLE et FRÉQUENTIELLE d'un SIGNAL PÉRIODIQUE

Si une fonction périodique vérifie les conditions de Dirichlet, alors :

* connaître f(t) ⇒ on sait calculer les coefficients C_n (ou a_n et b_n) de sa série de Fourier
* connaître les C_n ⇒ on sait calculer la fonction f(t)

Il est donc ÉQUIVALENT de décrire ce signal par :

* ses caractéristiques TEMPORELLES: courbe à temps **continu** y = f(t)
* ou ses caractéristiques FRÉQUENTIELLES (série de Fourier) : ensemble **discret** de coefficients C_n

♦ REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES d'un SPECTRE en FRÉQUENCE

On notera généralement : $\boxed{f_o = \dfrac{1}{T}}$ (ou ν_o) la fréquence **fondamentale** du signal étudié

et $\boxed{f_n = \dfrac{n}{T} = n\ f_o}$ la fréquence de l'**harmonique de rang n**

Les coefficients C_n étant complexes, il faudra DEUX graphes pour représenter leur **MODULE** et leur **ARGUMENT** en fonction de la fréquence f. C'est l'ensemble de ces deux graphes que l'on appelle le **SPECTRE** bilatéral **en fréquence** de la fonction f(t) étudiée.

De plus, ces coefficients n'existant que pour des valeurs discrètes de la fréquence ($\boldsymbol{f = n\, f_o}$), le spectre d'une fonction périodique est **DISCRET**, et formé de **raies aux différentes fréquences harmoniques** (en réalité, comme on le verra par la suite, ce sont des impulsions de Dirac, d'où la représentation usuelle avec des flèches).

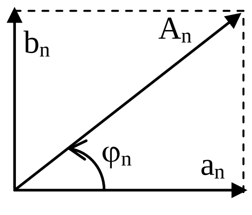
Le spectre des modules est donc constitué de raies uniquement à valeurs positives, et celui des arguments de raies à valeurs positives ou négatives et comprises dans l'intervalle $]-\pi\,;+\pi]$

Remarques importantes :

* Le spectre des modules est indépendant de l'origine des temps choisie pour représenter le signal (propriété de translation temporelle des coefficients C_n), mais pas le spectre des arguments.
* Pour un signal réel, les coefficients C_n et C_{-n} étant conjugués, le spectre des modules sera donc pair et celui des arguments, impair.

• Lorsque les signaux sont **RÉELS**, pour une interprétation plus "physique" du spectre, on préfère ne pas avoir de fréquences négatives, et on utilise alors plutôt une décomposition sous la forme $\boxed{\sum A_n \cos(n\omega\, t - \varphi_n)}$, avec les relations suivantes par rapport aux décompositions en C_n ou en a_n et b_n :

$$\boxed{\begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}} \quad \geq 0 \\ \cos\varphi_n = \dfrac{a_n}{A_n} \quad et \quad \sin\varphi_n = \dfrac{b_n}{A_n} \end{cases} \quad avec\ \varphi_n \in \left]-\pi; +\pi\right]} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{cases} |C_n| = \dfrac{A_n}{2} \\ Arg\ C_n = -\varphi_n \end{cases}} \quad \text{pour } n \geq 1$$



et $\boxed{A_o = a_o = C_o}$ (valeur moyenne du signal)

Le **spectre** correspondant à cette décomposition sera alors constitué du graphe des **AMPLITUDES $\boldsymbol{A_n}$** et du graphe des **PHASES $\boldsymbol{\varphi_n}$** en fonction de la fréquence, et est appelé spectre unilatéral en fréquence.

Remarque : le spectre des phases est peu utilisé par les électroniciens, qui se contentent en général du spectre en amplitude.

Astuce : Si on ne précise pas " $|C_n|$ " ou " A_n " pour le spectre en "amplitude", il suffit de regarder s'il y a des raies pour les fréquences négatives ou pas…

TRANSFORMATION DE FOURIER

PROPRIÉTÉS	Signal $f(t)$	Transformée de Fourier $F(\nu)$
	$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\, e^{2i\pi\nu t} d\nu$	$F(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi\nu t} dt$
Symétrie	$F(t)$	$f(-\nu)$
Parité	f <u>réelle</u> et <u>paire</u>	$F(\nu)$ est <u>réelle</u> et <u>paire</u> $F(\nu)=2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2\pi\nu t)\, dt$
	f <u>réelle</u> et <u>impaire</u>	$F(\nu)$ est <u>imaginaire pure et impaire</u> $F(\nu)=-2i\int_0^{+\infty} f(t)\sin(2\pi\nu t)\, dt$
Linéarité	$\alpha f(t)+\beta g(t)$	$\alpha F(\nu)+\beta G(\nu)$
Dilatation temporelle	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$
Décalage temporel	$f(t-t_o)$	$e^{-2i\pi\nu t_o} F(\nu)$
Dilatation+décalage temporels	$f\,[a\,(t-t_o)]$	$e^{-2i\pi\nu t_o} \frac{1}{\lvert a\rvert} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$
Décalage fréquentiel	$e^{2i\pi\nu_o t} f(t)$	$F(\nu-\nu_o)$
Dérivation temporelle	$f'(t)$ $f^{(n)}(t)$	$2i\pi\nu F(\nu)$ $(2i\pi\nu)^n F(\nu)$
Dérivation fréquentielle	$-2i\pi t\, f(t)$	$F'(\nu)$
Produit de convolution	$(f*g)(t)$ $f(t).g(t)$	$F(\nu).G(\nu)$ $F(\nu)*G(\nu)$

<u>FONCTIONS PÉRIODIQUES</u> : ***f(t)*** = fonction périodique de **période T**

Sa <u>**série**</u> **de Fourier** s'écrit : $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, e^{in\frac{2\pi}{T}t}$ avec $C_n=\frac{1}{T}\int_{[T]} f(t)\, e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\, dt$

***fₒ(t)* =** "**motif**" de la fonction *f(t)* sur un intervalle quelconque de largeur T.

On a donc : $\boxed{f(t)=[\,f_o * Ш_T\,](t)} = f_o(t)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$ et $C_n=\frac{1}{T}\int_{[T]} f_o(t)\, e^{-2i\pi\frac{n}{T}t}\, dt$

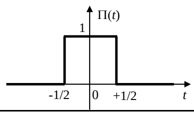
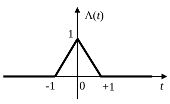
Calculons $F(\nu)$ la transformée de Fourier (au sens des distributions) de *f(t)*, en utilisant les propriétés de la TF et de la distribution de Dirac, et en posant $\boxed{F_o(\nu) = \text{TF}[\,f_o(t)\,]}$, on obtient alors :

$$\boxed{F(\nu)=} F_o(\nu).\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\nu-\frac{n}{T}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}F_o(\nu).\delta\left(\nu-\frac{n}{T}\right)=\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}F_o\left(\frac{n}{T}\right).\delta\left(\nu-\frac{n}{T}\right)}$$

Or $F_o(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_o(t)\, e^{-2i\pi\nu t}dt=\int_{[T]} f_o(t)\, e^{-2i\pi\nu t}dt$ donc $\boxed{C_n=\frac{1}{T}F_o\left(\frac{n}{T}\right)}$ et $\boxed{F(\nu)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n.\delta\left(\nu-\frac{n}{T}\right)}$

Le **spectre** d'une fonction périodique *f(t)* étant <u>discret</u>, et constitué de <u>raies de valeur C_n aux différents harmoniques</u> $\left(\frac{n}{T}\right)$ <u>de la fréquence</u>, **la transformée de Fourier** (au sens des distributions) ***F(ν)*** d'une **fonction périodique** ***f(t)*** est donc en fait **l'expression mathématique de son spectre.**

TRANSFORMÉES USUELLES

	Signal $f(t)$	Transformée de Fourier $F(\nu)$
Dirac à l'origine	$\delta(t)$ 1	1 $\delta(\nu)$
Dirac en a	$\delta_a(t) = \delta(t-a)$	$e^{-2i\pi\,\nu\,a}$
Exponentielle complexe *(distribution harmonique)*	$e^{2i\pi\,b\,t}$	$\delta_b(\nu) = \delta(\nu - b)$
Cosinus (distribution)	$\cos(2\pi\;a\;t)$	$\frac{1}{2}\left[\delta_a(\nu) + \delta_{-a}(\nu)\right]$
Sinus (distribution)	$\sin(2\pi\;a\;t)$	$\frac{1}{2i}\left[\delta_a(\nu) - \delta_{-a}(\nu)\right]$
Peigne de Dirac	Ш(t) = $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\,(t-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\,k\,t}$	Ш(ν) = $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\,(\nu - k)$
Peigne de période T	Ш$_T$ (t) = $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\,(t-kT) = \frac{1}{T}$.Ш$\left(\frac{t}{T}\right)$	Ш$(\nu\,T)$= $\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T}$.Ш$_{\frac{1}{T}}(\nu)$
Porte 	$\Pi(t)$	$\frac{\sin(\pi\;\nu)}{\pi\;\nu}$
Impulsion unité *(largeur ε , hauteur $1/\varepsilon$)*	$\frac{1}{\varepsilon}\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$	$\frac{\sin(\pi\;\nu\;\varepsilon)}{\pi\;\nu\;\varepsilon}$
Triangle 	$\Lambda(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$	$\left[\frac{\sin(\pi\;\nu)}{\pi\;\nu}\right]^2$
Gaussienne	$e^{-\pi\,t^2}$	$e^{-\pi\,\nu^2}$

Théorème de PARSEVAL $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(\nu)\right|^2 d\nu$

Distribution de Dirac

Définition	$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Intégration	$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$
Produit	$x(t) \times \delta(t - t_0) = x(t_0)\, \delta(t - t_0)$
Produit de convolution	$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$

Produit de convolution

	Cas continu	**Cas discret**
Définition	$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\, g(\tau) d\tau$	$(f * g)_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_{n-m}\, g_m$
Commutativité	$(f * g)(t) = (g * f)(t)$	$(f * g)_n = (g * f)_n$
Distributivité	$f(t)*[g(t) + h(t)] = (f*g)(t)+(f*h)(t)$	$f_n * (g_n + h_n) = (f * g)_n + (f * h)_n$
Associativité	$f(t) * [g(t) * h(t)] = [f(t) * g(t)] * h(t)$	$f_n * (g_n * h_n) = (f_n * g_n) * h_n$

Transformée de Fourier discrète

- N : nombre d'échantillons
- F_s : fréquence d'échantillonnage
- Fréquences observables : $f_k = k\dfrac{F_s}{N}$ avec $k = 0, \cdots, N-1$
- Résolution en fréquence : $\Delta f = \dfrac{F_s}{N}$

Transformée de Fourier discrète (TFD)	**Transformée de Fourier discrète inverse**
$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n\, e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$	$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k\, e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$

	Table des transformées de Laplace usuelles			
	Fonction	**Domaine temporel** $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(p)\}$	**Transformée de Laplace** $X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$	**Région de convergence**
1	Distribution de Dirac retardée	$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau p}$	$\forall\, p$
1a	Distribution de Dirac	$\delta(t)$	1	$\forall\, p$
2	exponentielle-monôme retardée	$\frac{(t-\tau)^n}{n!} e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \Upsilon(t-\tau)$	$\frac{e^{-\tau p}}{(p+\alpha)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(p) > 0$
2a	puissance *n*-ième	$\frac{t^n}{n!} \cdot \Upsilon(t)$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(p) > 0$
2a.1	puissance *q*-ième	$\frac{t^q}{\Gamma(q+1)} \cdot \Upsilon(t)$	$\frac{1}{p^{q+1}}$	$\mathrm{Re}(p) > 0$
2a.2	échelon unité	$\Upsilon(t)$	$\frac{1}{p}$	$\mathrm{Re}(p) > 0$
2b	échelon retardé	$\Upsilon(t-\tau)$	$\frac{e^{-\tau p}}{p}$	$\mathrm{Re}(p) > 0$
2c	rampe	$t \cdot \Upsilon(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$\mathrm{Re}(p) > 0$
2d	exponentielle-monôme	$\frac{t^n}{n!} e^{-\alpha t} \cdot \Upsilon(t)$	$\frac{1}{(p+\alpha)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(p) > -\alpha$
2d.1	exponentielle	$e^{-\alpha t} \cdot \Upsilon(t)$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\mathrm{Re}(p) > -\alpha$
3	approche exponentielle	$(1 - e^{-\alpha t}) \cdot \Upsilon(t)$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$\mathrm{Re}(p) > 0$
4	sinus	$\sin(\omega t) \cdot \Upsilon(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}(p) > 0$
5	cosinus	$\cos(\omega t) \cdot \Upsilon(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}(p) > 0$
6	sinus hyperbolique	$\sinh(\alpha t) \cdot \Upsilon(t)$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$\mathrm{Re}(p) > \lvert\alpha\rvert$
7	cosinus hyperbolique	$\cosh(\alpha t) \cdot \Upsilon(t)$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$\mathrm{Re}(p) > \lvert\alpha\rvert$
8	décroissance exponentielle d'une onde sinusoidale	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \cdot \Upsilon(t)$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}(p) > -\alpha$
9	décroissance exponentielle d'une onde cosinusoidale	$e^{-\alpha t} \cos(\omega t) \cdot \Upsilon(t)$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}(p) > -\alpha$
10	n-ième racine	$\sqrt[n]{t} \cdot \Upsilon(t)$	$p^{-(n+1)/n} \cdot \Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)$	$\mathrm{Re}(p) > 0$
11	logarithme	$\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \cdot \Upsilon(t)$	$-\frac{t_0}{p}\,[\,\ln(t_0 p) + \gamma\,]$	$\mathrm{Re}(p) > 0$
12	fonction de Bessel du premier type, d'ordre *n*	$J_n(\omega t) \cdot \Upsilon(t)$	$\frac{\omega^n \left(p + \sqrt{p^2+\omega^2}\right)^{-n}}{\sqrt{p^2+\omega^2}}$	$\mathrm{Re}(p) > 0$ $(n > -1)$
13	fonction de Bessel modifiée du premier type, d'ordre n	$I_n(\omega t) \cdot \Upsilon(t)$	$\frac{\omega^n \left(p + \sqrt{p^2-\omega^2}\right)^{-n}}{\sqrt{p^2-\omega^2}}$	$\mathrm{Re}(p) > \lvert\omega\rvert$ $(n > -1)$
14	fonction d'erreur	$\mathrm{erf}(t) \cdot \Upsilon(t)$	$\frac{e^{p^2/4}\,\mathrm{erfc}(p/2)}{p}$	$\mathrm{Re}(p) > 0$

Notes:

- $\Upsilon(t)$ représente la fonction de Heaviside.
- $\delta(t)$ représente la fonction de Dirac.
- $\Gamma(z)$ est la fonction Gamma.
- γ est la constante d'Euler-Mascheroni.
- t, est un nombre réel, il représente typiquement le temps, mais peut désigner n'importe quelle autre quantité.
- p est un nombre complexe.
- q est un nombre réel ($q+1>0$).
- α, β, τ, et ω sont des nombres réels.
- n est un entier.

4. TRANSFORMÉE EN Z

4.1 Définition

Soit f(t), une fonction causale et $f^*(t)$, la même fonction échantillonnée à la fréquence f_e.

$$f^*(t) = f(t).\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n.T_e) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n.T_e).\delta(t-n.T_e)$$

Sa transformée de Laplace s'écrit :

$$F^*(p) = \int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f(n.T_e).\delta(t-n.T_e).e^{-pt}dt$$

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n.T_e)\int_0^{\infty}\delta(t-n.T_e).e^{-pt}.dt$$

La transformée de Laplace d'un Dirac étant égale à l'unité et celle d'un Dirac retardé de τ, à $e^{-p\tau}$, en posant $\boxed{z = e^{pT_e}}$, on obtient la transformée en z de la fonction f(t) :

$$\boxed{Z[f(t)] = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n.T_e).e^{-npT_e} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n.T_e).z^{-n}}$$

4.2 Propriétés

4.2.1 Linéarité

$$\boxed{Z[a.f_1(t)+b.f_2(t)] = a.Z[f_1(t)]+b.Z[f_2(t)]}$$

4.2.2 Retard

Soit $f(t - k.T_e)$ nulle pour $t < k.T_e$, $\boxed{Z[f(t-k.T_e)] = z^{-k}.Z[f(t)]}$

On retiendra qu'un retard de T_e se traduit par une multiplication par z^{-1}.

4.2.3 Translation complexe

$$Z[e^{p_0 t}.f(t)] = F[z.e^{-p_0.T_e}]$$

4.2.4 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

$$\boxed{\lim_{n\to 0} f(n.T_e) = \lim_{z\to\infty} F(z)}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f(n.T_e) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1}).F(z)}$$

Formulaire lié à la transformation en Z

Signal causal $n \mapsto x(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$	Transformée en Z $z \mapsto (Zx)(z)$
$e(n) = 1$	$(Ze)(z) = \dfrac{z}{z-1}$
$\begin{cases} d(0) = & 1 \\ d(n) = & 0 \ si \ n \neq 0 \end{cases}$	$(Zd)(z) = 1$
$r(n) = n$	$(Zr)(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$
$c(n) = n^2$	$(Zc)(z) = \dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$f(n) = a^n, \ a \in \mathbb{R} - \{0\}$	$(Zf)(z) = \dfrac{z}{z-a}$
$y(n) = a^n x(n), \ a \in \mathbb{R} - \{0\}$	$(Zy)(z) = (Zx)\left(\dfrac{z}{a}\right)$
$y(n) = x(n-n_0)$, $(n-n_0) \in \mathbb{N}$ ou $y(n) = x(n-n_0)e(n-n_0)$	$(Zy)(z) = z^{-n_0}(Zx)(z)$
$y(n) = x(n+1)$	$(Zy)(z) = z\left[(Zx)(z) - x(0)\right]$
$y(n) = x(n+2)$	$(Zy)(z) = z^2\left[(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1}\right]$
$y(n) = x(n+n_0)$	$(Zy)(z)$ $=$ $z^{n_0}\left[(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1} - x(2)z^{-2} \cdots - x(n_0-1)z^{-(n_0-1)}\right]$