Université de Paris-Saclay
Faculté des sciences d'Orsay
L3 PIST

305a
Signaux et Systèmes Linéaires

TD

Convolutions et Transformées de Fourier

Exercice 1 Convolution continue

Soient a et b deux réels strictement positifs (on supposera $0 < a \leq b$). Le but de cet exercice est de calculer, en fonction de a et b , par une méthode "graphique", le produit de convolution des signaux $f(t) = \Pi_{2a}(t)$ et $g(t) = \Pi_{2b}(t)$, c'est-à-dire sans calculer directement l'intégrale de convolution $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\, g(t-\theta)\, d\theta$.

a. Déterminer en fonction de θ et de t les supports I_1 et I_2 des fonctions $f(\theta)$ et $g(t-\theta)$.

b. Déterminer en fonction de t les différentes positions relatives possibles de I_1 et I_2, et représenter, dans chaque cas, le produit de $f(\theta)$ par $g(t-\theta)$), puis calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\, g(t-\theta)\, d\theta$ correspondante, égale en pratique à l'aire sous la courbe ainsi obtenue, pour en déduire la valeur de $(f * g)(t)$ en fonction de t.

c. Que devient cette courbe si $a = b$?

Exercice 2 Convolution discrète

On considére les deux signaux $x[k]$ et $y[k]$ donnés par :

$$x[k] = \Pi_N[k-3]$$

et

$$y[k] = |a|^k H[k] \text{ avec } |a| < 1$$

où $\Pi_N[k]$ est la fonction rectangle échantillonnée de durée N et $H[k]$ est la fonction échelon unité (Heaviside échantillonné).

a. Représenter graphiquement (pour $N = 7$ et $a = 0,75$) $x[k]$, $y[k]$, $y[-k]$, $y[4-k]$ et $y[-3-k]$ en fonction de k.

b. Pour une suite géométrique u_k de raison $q \neq 1$ et de premier terme égale à 1, démontrer que

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$$

c. Calculer et tracer le produit de convolution $\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]\, y[k-l]$en distinguant les cas $k < 0$, $0 \leq k < N$ et $k \geq N$.

Exercice 3 Transformée de Fourier continue

On considère le signal défini par

$$s(t) = \begin{cases} 1 & si\ |t| \leq 1 \\ 2 - |t| & si\ 1 \leq |t| \leq 2 \\ 0 & si\ |t| \geq 2 \end{cases}$$

a. Représenter graphiquement $s(t)$.
Calculer la transformée de Fourier $\hat{s}(f)$
b. Directement en utilisant la définition de la TF.
c. En écrivant $s(t)$ comme une somme de triangle.
d. En utilisant sa dérivé (par morceaux) $s'(t)$.
e. En écrivant $s(t)$ comme un produit de convolution de 2 portes (de largeurs a et b, à déterminer).

Exercice 4 Transformée de Fourier continue de signaux à temps fini

Soit le signal $s(t) = cos(5\pi t)$.
a. Calculer la transformée de Fourier de $s(t)$.
On multiplie le signal $s(t)$ par la fonction porte $\Pi_1(t)$.
b. Représenter graphinquement le signal obtenu $g(t) = s(t)\Pi_1(t)$.
c. Calculer la transformée de Fourier du signal $g(t)$.
d. Représenter l'allure du spectre du signal $g(t)$. Conclusion ?

Exercice 5 Transformée de Fourier des signaux numériques

On considére les deux signaux à temps discret suivants :

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-2]$$

et

$$y[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

a. Calculer la transformée de Fourier de $x[n]$ (mettre le résultat sous forme polaire).
b. Retrouvez la signal $x[n]$ en calculant la transformée de Fourier inverse. Pour cela il est conseillé de traiter séparément les trois cas $n = 0$, $n = 2$ et $n \notin \{0, 2\}$.
c. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que

$$1 + z + z^2 = \frac{z^{3/2}}{z^{1/2}} \left(\frac{z^{-3/2} - z^{3/2}}{z^{-1/2} - z^{1/2}} \right)$$

et en déduire que $1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} = \frac{sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\theta}$ ainsi que la transformée de Fourier de $y[n]$.