

Exercice 1 :

1) Pour $X \sim \text{Bernoulli}$ $p_1 = p$ et $p_2 = 1-p \Rightarrow H(x) = -p \ln p - (1-p) \ln(1-p)$

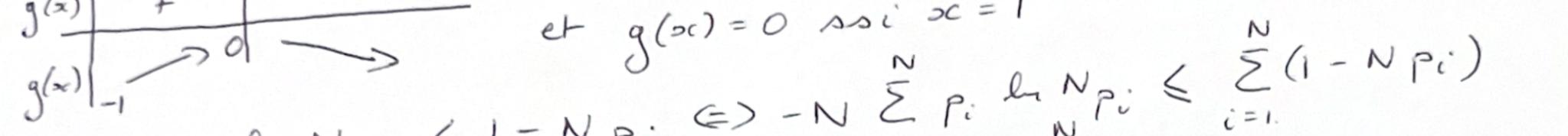
2) On dérive $H(x)$ par rapport à p : $H'(x) = -\ln p - p/p + \ln(1-p) + (1-p)/1-p$

3) $H(x) = -\sum_{i=1}^N p_i \ln p_i$ avec $p_i = \frac{1}{N} \forall i \Rightarrow H'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln p = \ln(1-p)$
 $\Leftrightarrow p = 1-p \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$
 $= -\sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \ln \frac{1}{N} = -\ln \frac{1}{N} = \ln N$

4) $\forall i, 0 < p_i \leq 1 \Rightarrow \ln p_i \leq 0$ et on a une somme finie de termes ^{car $0 < p_i < 1$} positifs
 Donc $H(x) \geq 0$. $H(x) = 0$ si et seulement si les termes sont nuls

Dans si $\ln p_i = 0 \forall i \Rightarrow p_i = 1 \forall i$.

5) Soit $g(x) = -x \ln x + x - 1 \Rightarrow g'(x) = -\ln x - 1 + 1 = -\ln x$



$\Rightarrow g(x) \leq 0 \forall x > 0$
 et $g(x) = 0$ si $x = 1$

6) $-N p_i \ln N p_i \leq 1 - N p_i \Leftrightarrow -N \sum_{i=1}^N p_i \ln N p_i \leq \sum_{i=1}^N (1 - N p_i)$
 $\Leftrightarrow -N \sum_{i=1}^N p_i \ln N - N \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i \leq N - N \sum_{i=1}^N p_i$
 $\Leftrightarrow -N \ln N \sum_{i=1}^N p_i + N H(x) \leq 0 \Leftrightarrow H(x) \leq \ln N$
 $= H(x)$ d'après Q 3

7) $H(x) = -\sum_{i=1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} \ln(p(1-p)^{i-1})$
 $= -\sum_{i=1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} [\ln p + (i-1) \ln(1-p)]$
 $= -p \ln p \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} - p \ln(1-p) \sum_{i=1}^{+\infty} (i-1)(1-p)^{i-1}$
 $= -p \ln p \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k - p \ln(1-p) \sum_{k=0}^{+\infty} k(1-p)^k$
 $= -p \ln p \frac{1}{1-p} - p \ln(1-p) (1-p) \sum_{k=0}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}$
 $= -\ln p - \frac{1-p}{p} \ln(1-p)$

$x = \frac{y-b}{a}$ et $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a}$

8) $E(h(ax+b))^P = \int h(ax+b) f_x(x) dx$

Donc $= \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) \left[\frac{1}{a} f_x\left(\frac{y-b}{a}\right) \right] dy$

Les bornes ne changent pas car

9) $H(Y) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \ln f_Y(y) dy = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} f_x\left(\frac{y-b}{a}\right) \ln\left(\frac{1}{a} f_x\left(\frac{y-b}{a}\right)\right) dy$
 $= \ln f_x\left(\frac{y-b}{a}\right) - \ln a$

on pose $u = \frac{y-b}{a} \Rightarrow du = \frac{1}{a} dy$
 $\Rightarrow H(Y) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(u) \ln f_x(u) du - \ln a \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(u) du$
 $= H(X) - \ln a$

Exercice 2:

1) $\theta = 0,002 \text{ m}^3 \times 100 = 0,2 \Rightarrow P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\theta^0}{0!} e^{-\theta} \quad (2)$
 $= 1 - e^{-0,2} \approx 0,181$

~~2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dots$~~

2) $V_{\text{var}}(2x+1) = E((2x+1)^2) - (E(2x+1))^2 = E(4x^2 + 4x + 1) - (2E(x) + 1)^2$
 $= 4E(x^2) + 4E(x) + 1 - 4E(x)^2 - 4E(x) - 1$

3) $P(\text{"A gagné"}) = \frac{\text{Card } (H)}{6 \times 6 \times 6 \times 12}$ avec Card $(H) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{12} \sum_{l=1}^{24} \mathbb{I}_{\{i+j+k > m\}}$

$\Rightarrow \text{Card } (H) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 (12(i+j-1) + 78) = \sum_{i=1}^6 6 \times 12i + 12(15) + 6 \times 78 = 5400$
 $\Rightarrow P(\text{"A gagné"}) = \frac{5400}{10368}$

4) $E\left(\frac{1}{(1+x)(2+x)(3+x)}\right) = e^{-\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{(k+3)!}$
 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\theta^{k+1}(k+3)!}{\theta^k(k+4)!} = 0 < 1$
 $= \frac{e^{-\theta}}{\theta^3} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^{k+3}}{(k+3)!} = \frac{e^{-\theta}}{\theta^3} \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\theta^k}{k!} = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \left(e^{\theta} - 1 - \theta - \frac{\theta^2}{2} \right)$

Exercice 3:

1) $\alpha \beta^\alpha > 0$ car $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ et $x^{\alpha+1} > 0$ puisque $x > \beta > 0 \Rightarrow \int_{\beta}^{+\infty} x^{\alpha} dx > 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) dx = \alpha \beta^\alpha \int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha \beta^\alpha \left[-\frac{1}{\alpha x^\alpha} \right]_{\beta}^{+\infty} = \alpha \beta^\alpha \left(0 + \frac{1}{\alpha \beta^\alpha} \right) = 1$

2) $F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(u) du = \alpha \beta^\alpha \int_{\beta}^x \frac{1}{u^{\alpha+1}} du = \alpha \beta^\alpha \left[-\frac{1}{\alpha u^\alpha} \right]_{\beta}^x = \alpha \beta^\alpha \left(\frac{1}{\alpha \beta^\alpha} - \frac{1}{\alpha x^\alpha} \right)$
 $= 1 - \left(\frac{\beta}{x} \right)^\alpha$ si $x \geq \beta$
 $(= 0$ sinon)

3) $E(x) = \alpha \beta^\alpha \int_{\beta}^{+\infty} \frac{x}{x^{\alpha+1}} dx$ CV si $\alpha > 1$

$E(x^2) = \alpha \beta^\alpha \int_{\beta}^{+\infty} \frac{x^2}{x^{\alpha+1}} dx$ CV si $\alpha - 1 > 1 \Rightarrow \alpha > 2$

4) $E(x) = \alpha \beta^\alpha \left[-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \right]_{\beta}^{+\infty} = \alpha \beta^\alpha \left(0 + \frac{1}{(\alpha-1)\beta^{\alpha-1}} \right) = \frac{\alpha \beta}{\alpha-1}$

5) $V_{\text{var}}(x) = E(x^2) - (E(x))^2$ avec $E(x^2) = \alpha \beta^\alpha \int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx = \alpha \beta^\alpha \left[-\frac{1}{(\alpha-2)x^{\alpha-2}} \right]_{\beta}^{+\infty}$
 $= \frac{\alpha}{\alpha-2} \beta^2$

$\left[\frac{\alpha}{\alpha-2} \beta^2 - \left(\frac{\alpha \beta}{\alpha-1} \right)^2 \right]^{1/2}$
 $F_x(m) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{\beta}{m} \right)^\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta}{m} = \left(\frac{1}{2} \right)^{1/\alpha} \Leftrightarrow m = \beta \cdot 2^{1/\alpha}$

6) $F_x(m) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{\beta}{m} \right)^\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta}{m} = \left(\frac{1}{2} \right)^{1/\alpha} \Leftrightarrow m = \beta \cdot 2^{1/\alpha}$

7) $E(h(x^2-1)) = \int_{\beta}^{+\infty} h(x^2-1) \frac{\alpha \beta^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx$ on pose $y = x^2 - 1 \Rightarrow x = \sqrt{y+1} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y+1}}$
 $= \int_{\beta^2-1}^{+\infty} h(y) \frac{\alpha \beta^\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{y+1}(\sqrt{y+1})^{\alpha+1}} dy \Rightarrow f_y(y) = \frac{\alpha \beta^\alpha}{2(y+1)^{\frac{\alpha+2}{2}}}$ si $y \geq \beta^2 - 1$
 $(= 0$ sinon)

Exercice 4:

(3)

1) Si $k > m$ alors il y a + de paquet perdu que de paquets envoyés impossible $\Rightarrow P(X=k | N=m) = 0$ si $k > m$

2) On a une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes \rightarrow Binomiale (m, p)

3) Partition + Marginalisation

$$4) P(X=k) = \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{m!}{k!(m-k)!} p^k (1-p)^{m-k} \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta}$$

$$= \frac{e^{-\theta}}{k!} p^k (1-p)^{-k} \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{(1-p)^m \theta^m}{(m-k)!} = \frac{e^{-\theta}}{k!} p^k (1-p)^{-k} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^{m+k} \theta^{m+k}}{m!} = \frac{e^{-\theta}}{k!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{((1-p)\theta)^{m+k}}{m!}$$

$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{m+1}}{u_m} \right| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\theta(1-p)}{m-k+1} = 0 < 1$
 \Rightarrow CV d'après D'Alembert
 $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{((1-p)\theta)^{m+k}}{m!} = \frac{((1-p)\theta)^k}{(1-p)\theta} = e$

5) On pose $m = m - k \Rightarrow m = m + k$

$$P(X=k) = \frac{e^{-\theta}}{k!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{((1-p)\theta)^{m+k}}{m!} = \frac{e^{-\theta}}{k!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \frac{(1-p)^k}{\theta^{-k}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{((1-p)\theta)^m}{m!}$$

On reconnaît une loi de Poisson de paramètre $p\theta$

6) $Y \sim \text{Poisson}((1-p)\theta)$

Exercice 5:

B_A = "choisir le bateau à l'aller" B_R = "choisir le bateau au retour"

1) $P(B_A \cap B_R) = P(B_R | B_A) P(B_A) = 0,9 \times 0,65 = \boxed{0,585}$

2) $P(B_A \cap \bar{B}_R \cup \bar{B}_A \cap B_R) = P(B_A \cap \bar{B}_R) + P(\bar{B}_A \cap B_R)$
 $= P(\bar{B}_R | B_A) P(B_A) + P(B_R | \bar{B}_A) P(\bar{B}_A)$
 $= (1 - 0,9) \times 0,65 + 0,7 \times (1 - 0,65) = \boxed{0,31}$

3) $P(B_A | B_R) = \frac{P(B_R | B_A) P(B_A)}{P(B_R)}$ avec $P(B_R) = P(B_R | B_A) P(B_A) + P(B_R | \bar{B}_A) P(\bar{B}_A)$
 $= \frac{0,9 \times 0,65}{0,83} = \boxed{0,705}$

4) On reconnaît une loi binomiale (dict. indep. éval.) de paramètres 20 et p avec $p = 0,31$ d'après la question 2

5) $P(X=12) = \frac{20!}{12!(20-12)!} p^{12} (1-p)^{20-12} = \boxed{0,005}$

6) $P(X \geq 12) = 1 - P(X=1) - P(X=0) = 1 - \frac{20!}{1!(20-1)!} p^1 (1-p)^{20-1} - \frac{20!}{20!} p^0 (1-p)^{20} \approx \boxed{0,89}$

7) $Y = \{2400, 2760, 3120\}$
 $P(Y=3120) = 0,585$ d'après Q1
 $P(Y=2760) = 0,31$ d'après Q2 $\Rightarrow P(Y=2400) = 1 - 0,585 - 0,31 = \boxed{0,105}$

8) $E(Y) = 2400 \times P(Y=2400) + 2760 \times P(Y=2760) + 3120 \times P(Y=3120) = \boxed{2932,80}$