TD 1
Généralités sur le calcul de probabilités

Exercice 1

Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns **et** les cheveux blonds. On choisit un individu au hasard.

1. D'après l'énoncé, quelles sont les évènements liés à cet exercice. Détailler les probabilités données dans l'énoncé.
2. Calculez la probabilité d'avoir les cheveux blonds **sachant** qu'on a les yeux bruns.
3. Calculez la probabilité d'avoir les yeux bruns **sachant** qu'on a les cheveux blonds.
4. Calculez la probabilité de ne pas avoir les yeux bruns **sachant** qu'on a les cheveux blonds.

Exercice 2

On tire au hasard deux cartes (sans remise) dans un jeu de 52 cartes.

1. Quelle est la probabilité pour que la couleur de la 1ère carte **et** la 2ème carte soit pique ? Indice : attention à bien définir les évènements en incluant l'ordre du tirage car le jeux est sans remise.
2. Quelle est la probabilité pour que la première carte soit un pique **et** la seconde un coeur ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un pique **et** un coeur (sans ordre particulier) ?

Exercice 3

Démontrer la formule de Poincaré par récurrence.

Exercice 4

Le joueur A possède deux dés à six faces, et le joueur B possède un dé à douze faces (les 3 dés sont équilibrés). Le joueur qui fait le plus grand score remporte la mise (match nul si égalité).

1. Définir rigoureusement l'espace d'état Ω. Combien y a t'il d'élements dans Ω.
2. Donner la probabilité que A gagne en fonction du nombre d'éléments de Ω et du nombre d'éléments de l'ensemble $\Theta = \{(i,j,k) \text{ tel que } 1 \leq i \leq 6; 1 \leq j \leq 6; 1 \leq k \leq 12 \text{ et } i+j > k\}$. Attention ne pas chercher ici à calculer le nombre d'éléments de l'ensemble Θ. On cherche simplement une formule faisant intervenir $Card(\Omega)$ et $Card(\Theta)$.
3. Soit la fonction $\mathbb{I}_{\{k'>k\}} = \begin{cases} 1 \text{ si } k'>k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Montrer et détailler que le nombre d'élements de l'ensemble Θ est donné par $\sum_?^?\sum_?^?\sum_?^?\mathbb{I}_{\{?\}}$.
4. Calculer $\sum_{k=1}^{12}\mathbb{I}_{\{2>k\}}$ puis $\sum_{k=1}^{12}\mathbb{I}_{\{3>k\}}$. En déduire $\sum_{k=1}^{12}\mathbb{I}_{\{k'>k\}}$ en fonction de k'.
5. Donner la probabilité que A gagne et la probabilité d'avoir un match nul. Le jeu est-il équilibré ?

Exercice 5

On dépose au hasard un cadeau derrière l'une d'entre trois portes. Un jeu consiste a trouver ce cadeau en deux étapes. D'abord vous choisissez une porte ; puis l'organisateur, pour garder le suspence, vous montre parmi les deux portes restantes, une porte derrière **forcement** laquelle le cadeau ne se trouve pas. Vous savez que le l'organisateur agit toujours ainsi. Vous avez alors la possibilité entre changer de choix où le garder : que faites-vous ? Indice : il s'agit de détailler tout les cas possibles sur un exemple.

Exercice 6

Deux étudiants E_1 et E_2 passent le même examen. Ils ne communiquent pas. E_2 a beaucoup plus travaillé que E_1 et à trois fois plus de chance de réussir l'examen. La probabilité pour que l'un **ou** l'autre soit reçu est de 175/300.

1. Calculer la probabilité p de réussite pour E_1 et puis la probabilité de réussite de E_2.

2. Calculer en fonction de p (i) la probabilité que E_1 **seul** soit réçu (ii) la probabilité que E_2 **seul** soit réçu (iii) **un seul des deux** soit reçu (iv) **tous les deux** soient reçus.

Exercice 7

On suppose que l'on a autant de chance d'avoir une fille ou un garçon à la naissance. Il s'agit de plus d'évenements supposés indépendants.

Votre voisin de palier vous dit qu'il a deux enfants, donc un cadet et un ainé.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait **au moins** un garçon ?

2. Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon, **sachant** que l'aînée est une fille ?

3. Quelle est la probabilité qu'il ait **au moins** un garçon, **sachant** qu'il a au moins une fille ?

4. Vous téléphonez à votre voisin. Une fille décroche le téléphone. Vous savez que dans les familles avec un garçon et une fille, la fille décroche le téléphone avec probabilité p, quelle est la probabilité que votre voisin ait un garçon ?

Exercice 8

Les laboratoires pharmaceutiques indiquent pour chaque test sa sensibilité α, qui est la probabilité que le test soit positif **sachant que** le sujet est malade, et sa spécificité β, qui est la probabilité que le test soit négatif **sachant que** le sujet est sain. La probabilité d'être malade est de τ.

1. Calculer la probabilité pour que vous soyez un sujet sain **sachant que** votre test est positif.

2. Calculer la probabilité d'être malade **sachant que** le test est négatif.

3. Applications numériques avec $\alpha = 98\%$, $\beta = 97\%$ et $\tau = 1/1000$. Commenter.

On effectue maintenant deux tests **indépendant**.

4. Calculer la probabilité pour que vous soyez un sujet sain **sachant que** vos deux tests on été positif. Commenter.

Exercice 9

Une filiére d'enseignement comporte trois groupes de travaux dirigés, G_1, G_2 et G_3, de 18, 20 et 22 étudiants, respectivement. Les résultats d'un examen sont affichés. Il y a 38%, 50% et 62% de reçu, respectivement. **Sachant qu'**un enseignant rencontre un étudiant qui lui dit joyeusement "Je suis reçu !", quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse d'un étudiant du groupe G_2.

Exercice 10

On joue avec un dé à six faces non truqué. On pourra utiliser l'evenement S_i ="obtenir un six au lancé numéro i"

1. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre 6 en quatre coups ?

2. Ecrire l'evenement contraire de "obtenir **au moins** une fois le 6 en quatres coups". Quelle est la probabilité d'obtenir **au moins** une fois le 6 en 4 coups ?

On joue désormais avec 2 dés à six faces.

3. Quelle est la probabilité d'obtenir **au moins** une fois un double 6 en 24 coups ?