Université de Paris-Saclay

L3 E3A

—–

3H00

*2023-2024*

Probabilités

—–

**Examen**

# Exercice 1 (40 minutes)

Soit $a > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle suit une loi de Xenakis [1] si elle a pour densité de probabilité la fonction $f_X(x) = \frac{2}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right)$ *si* $x \in [0, a]$ ($f_X(x) = 0$ sinon).

1. Démontrer que $f_X(x)$ est bien une densité de probabilité.
2. Est-ce que $X \in L^1$ ? Si oui, calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. Est-ce que $X \in L^2$ ? Si oui, calculer $Var(X)$.
4. Calculer la fonction de répartition de $X$ en prêtant attention à son domaine de définition.
5. Pour une variable aléatoire réelle admettant une densité de probabilité, on appelle médiane. [2] le nombre, noté $m$, tel que $P(X \leq m) = P(X \geq m) = \frac{1}{2}$. Calculer la médiane de la variable aléatoire de Xenakis.
6. Montrer que la fonction caractéristique de $X$ s'écrit $\phi_X(u) = \frac{2}{a^2u^2}\left(1 - e^{iau} + iau\right)$.
7. On pose $Y = X^2 + 1$. Calculer la densité de probabilité de la variable aléatoire $Y$ en prêtant attention à son domaine de définition.

# Exercice 2 (20 minutes)

L'examen du code de la route Français se compose de 40 questions. Pour chaque question, on a le choix entre 4 réponses possibles. Une seule de ces réponses est correcte. Un candidat se présente à l'examen. Il a bien travaillé mais n'est pas parfait... donc sachant qu'il connait la vraie réponse à une des questions, alors il répond correctement à coup sûr **(probabilité égale à** 1**)**. Par contre, sachant qu'il ignore la réponse, alors il choisit au hasard entre les 4 réponses proposées (puisque cet examen ne sanctionne pas les mauvaises réponses). On suppose que toutes les questions sont indépendantes et que, pour chacune de ces questions, la probabilité que le candidat connaisse la vraie réponse est $p$ (cette probabilité ≪ représente ≫ le niveau de travail de celui-ci). On note, pour $1 \leq i \leq 40$, $A_i$ l'événement aléatoire : "le candidat donne la bonne réponse à la $i$-ème question". On note $S$ la variable aléatoire égale au nombre total de bonnes réponses.

1. En justifiant soigneusement par un calcul, montrer que $P(A_i) = \frac{3}{4}p + \frac{1}{4}$.
2. Quelle est la distribution de $S$ ? Justifier.
3. Pour réussir l'épreuve, il faut au moins 36 bonnes réponses au questionnaire. A quelle condition sur $p$ le candidat donnera **en moyenne** 36 bonnes réponses (attention nous cherchons à obtenir une inégalité) ?

---

1. Cette loi de probabilité ne provient pas des sciences mais du monde des arts ! Elle a été crée empiriquement et utilisée par le compositeur Iannis Xenakis en ≪ musique stochastique ≫. La musique stochastique est le nom donné à une conception de la composition musical qu'il a mise au point à partir de 1954, sa particularité est d'être composée par le biais des calculs de probabilités. Ce genre musical essaie de se rapprocher des phénomènes biologiques et des événements du monde vivant. Plus d'informations sur ce lien https ://www.larousse.fr/encyclopedie/musdico/musique_stochastique/170216 et un autre pour écouter la musique en question https ://www.youtube.com/watch ?v=LrYw8uIJ38g (moi j'aime pas trop :/).

2. La médiane est un indicateur de tendance centrale. Par comparaison avec la moyenne, elle est insensible aux valeurs extrêmes mais son calcul est un petit peu plus complexe. Prenons l'exemple des salaires. En France, en 2019, le salaire mensuel net moyen (en équivalent temps plein) était de 2 424 euros dans le secteur privé. Or, cette série contient de nombreuses valeurs extrêmes, c'est-à-dire éloignées de la moyenne. Par exemple, 1 % des employés du secteur privé ont un salaire supérieur à 9 103 euros par mois. Ces valeurs extrêmes gonflent ici, artificiellement, la moyenne et la rendent, d'une manière générale, peu représentative de la distribution effective des données. Dans ce cas, calculer la médiane est utile : le salaire mensuel net médian (en équivalent temps plein) était de seulement 1 940 euros. Autrement dit, 50 % des salariés du secteur privé touchaient plus de 1 940 euros par mois et 50 % gagnaient moins. La médiane a, de plus, l'avantage de toujours exister (contrairement à la moyenne). Les enseignants ne devraient donc t'ils pas donner la médiane des notes obtenues à un examen pour une promotion plutôt que la classique ≪ moyenne de classe ≫ ?

4. On pose $p = \frac{13}{15}$, quelle est la probabilité que le candidat fasse un sans fautes ? Conclusion vis-à-vis de la question 3 ?

# Exercice 3 (50 minutes)

On rappel que la série géométrique $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ si $|x| < 1$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x| < 1$. Une gare dispose de deux guichets. Trois clients arrivent en même temps juste avant la fermeture (il n'y aura pas d'autres clients). Les deux premiers clients se font servir tandis que le troisième client attend [3] (puisqu'il n'y a que deux guichets) puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit $X_1$, $X_2$, et $X_3$ les variables aléatoires égales à la durée de l'opération des trois clients. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires $X_1$, $X_2$, et $X_3$ suivent une distribution géométrique de même paramètre $p$, avec $p \in ]0, 1[$ et qu'elles sont **indépendantes**.

On note $A$ l'événement : « le 3ème client termine son opération ». On se propose dans cet exercice de calculer la probabilité de $A$. Un petit raisonnement, non demandé ici, permet de montrer que l'événement $A$ est égal à l'événement $X_3 > \Delta$ avec $\Delta$ la variable aléatoire telle que $\Delta = |X_1 - X_2|$.

1. Rappeler la distribution de $X_1$ ainsi que son espérance et sa variance.
2. Montrer que $P(X_3 > n) = (1-p)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Quelles sont les valeurs possibles pour $\Delta$ ?
4. Montrer que la probabilité $P(\Delta = 0) = \frac{p}{2-p}$.
5. Soit $n$ un nombre entier strictement positif. Montrer, en justifiant soigneusement, que

$$P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k + n) P(X_2 = k)$$

puis en déduire que $P(\Delta = n) = \frac{2p(1-p)^n}{2-p}$.

6. Montrer que $\Delta \in L^1$ et calculer son espérance.
7. Montrer que $\mathbb{E}\left((X_1 - X_2)^2\right) = 2Var(X_1)$. En déduire que $\Delta \in L^2$.
8. Ecrire $P(X_3 > \Delta)$ en fonction d'une somme faisant intervenir $P(X_3 > n | \Delta = n)$ et $P(\Delta = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, et en déduire que

$$P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\Delta = n) P(X_3 > n)$$

9. Exprimer $P(A)$ en fonction de $p$.

# Exercice 4 (30 minutes)

Soit $(X, Y)^T$ un vecteur gaussien tel que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$, $\mathbb{E}(X^2) = 4$ et $\mathbb{E}(Y^2) = 1$. On sait de plus que les variables aléatoires $2X + Y$ et $X - 3Y$ sont indépendantes.

1. Justifier soigneusement que $\mathbb{E}((2X + Y)(X - 3Y)) = 0$ et en déduire la valeur de $\mathbb{E}(XY)$.
2. Donner la moyenne et la variance des variables aléatoires $2X + Y$ et $X - 3Y$.
3. Déterminer la matrice de covariance du vecteur aléatoire $(X, Y)^T$. Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont elles indépendantes ?

3. Il s'agit ici d'un cas simple d'étude d'une file d'attente. La théorie des files d'attente est une théorie mathématique relevant du domaine des probabilités, qui étudie les solutions optimales de gestion des files d'attente, ou queues. Une queue est nécessaire et se créera d'elle-même si ce n'est pas anticipé, dans tous les cas où l'offre est inférieure à la demande, même temporairement. Elle peut s'appliquer à différentes situations : gestion des avions au décollage ou à l'atterrissage, attente des clients et des administrés aux guichets, ou bien encore stockage des programmes informatiques avant leur traitement. Ce domaine de recherches, né en 1917, des travaux de l'ingénieur danois Erlang sur la gestion des réseaux téléphoniques de Copenhague à partir de 1908, étudie notamment les systèmes d'arrivée dans une queue, les différentes priorités de chaque nouvel arrivant, ainsi que la modélisation statistique des temps d'exécution.

4. Montrer que la densité de probabilité jointe du vecteur aléatoire $(X, Y)^T$ s'écrit

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} e^{-\frac{1}{6}\left(x^2 - 2xy + 4y^2\right)}.$$

## Exercice 5 (40 minutes)

Un fabricant prépare des films de protection d'écran pour téléphones portables. Il retient trois longueurs pour la diagonale des écrans (et donc pour les films), 4 pouces, 5 pouces et 6 pouces. On se limite ici aux téléphones avec ces trois tailles d'écran. Une étude de marché indique au fabricant que les écrans de 4 pouces équipent 30% des téléphones. Cette étude lui indique aussi que, sachant que le téléphone possède un écran de 4 pouces, 30% ont une protection d'écran. C'est aussi le cas de 25% des téléphones sachant qu'ils disposent d'un écran 5 pouces et de 40% des téléphones sachant qu'ils disposent d'un écran 6 pouces. Enfin, on sait également par le biais de cette étude que 34% des téléphones disposent d'une protection d'écran. On trouve un téléphone par hasard.

On pose comme événements aléatoires $E_i$ ='l'écran est de taille $i$ pouces' avec $i = 4, 5$ ou 6 et $PE$ ='le téléphone dispose d'une protection d'écran'. **On utilisera exclusivement ces notations dans la suite de l'exercice.**

1. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un téléphone d'écran 5 pouces ou d'un téléphone d'écran 6 pouces.

2. Sachant que le téléphone dispose d'une protection d'écran, quelle est la probabilité d'avoir une diagonale d'écran de 4 pouces ?

3. En étudiant la probabilité $P(PE)$ d'avoir une protection d'écran, montrer en justifiant soigneusement que $\frac{8}{5}P(E_6) + P(E_5) = 1$.

4. En déduire $P(E_5)$ et $P(E_6)$.

5. Sachant que le téléphone possède une protection d'écran et n'a pas un écran de 5 pouces, calculer la probabilité qu'il possède un écran de 6 pouces. **Indication :** réfléchir à la signification « physique » de l'événement aléatoire $\overline{E_5} \cap E_6$.