# LOIS CLASSIQUES

**Exercice 1 - Carré de la loi uniforme** - *L2/L3/ECS* - ⋆

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a,b]$, avec $0<a<b$. Donner la fonction de répartition, la densité, l'espérance et la variance de $Y=X^2$.

**Exercice 2 - Uniforme et exponentielle** - *L2/L3/ECS* - ⋆

Soit $U$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Démontrer que la variable aléatoire $X=-\ln U$ suit une loi exponentielle.

**Exercice 3 - Lecture de la table de la loi normale** - *L2/ECS* - ⋆

1. Lecture directe : soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer $t>0$ tel que $P(-t<X<t)\simeq 0,95$.
2. Renormalisation : soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(8,4)$. Donner des valeurs approchées pour
$$P(X<7,5),\ P(X>8,5),\ P(6,5<X<10),\ P(X>6|X>5).$$
3. Lecture inverse : Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi gaussienne. Déterminer l'espérance et la variance de $X$ sachant que
$$\left\{\begin{array}{rcl} P(X<-1) & \simeq & 0,05\\ P(X>3) & \simeq & 0,12.\end{array}\right.$$

**Exercice 4 - Somme** - *L2/ECS* - ⋆

Un grossiste fournit en viande hachée trois cantines. Il reçoit chaque matin leurs commandes. Ce sont des variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales d'espérance respective 55 kg, 65 kg et 30kg, et d'écart-type respectif 4 kg, 10 kg et 3 kg. Calculer la quantité de viande dont le grossiste dois disposer pour que le risque de ne pouvoir satisfaire la demande soit inférieur à 5%.

**Exercice 5 - Un équivalent de la queue de la gaussienne** - *L3* - ⋆⋆

Pour $x>0$, on pose $F(x)=\int_x^{+\infty}e^{-t^2/2}dt$ et $G(x)=\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}dt$.

1. Démontrer que $G(x)=_{+\infty}o\big(F(x)\big)$.
2. Soit $X$ suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Donner un équivalent de $P(X>x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 6 - Variable aléatoire sans mémoire** - *L2/L3/ECS* - ⋆⋆

On dit qu'une variable aléatoire $T$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est *sans mémoire* si elle vérifie, pour tous $s,t>0$.
$$P(T>t+s)=P(T>t)P(T>s).$$

1. Vérifier qu'une variable aléatoire $T$ vérifiant une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$, c'est-à-dire dont la densité est donnée par $f(t)=\lambda\exp(-\lambda t)\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$ est une variable aléatoire sans mémoire.
2. Réciproquement, soit $T$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ sans mémoire et vérifiant $P(T>0)>0$.

(a) On suppose qu'il existe $t > 0$ tel que $P(T > t) = 0$. Calculer $P(T > t/2^n)$ en fonction de $P(T > t)$. En déduire que $P(T > 0) = 0$. Conclusion ?

(b) Soit $\alpha = P(T > 1)$. Démontrer que $P(T > t) = \alpha^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (démontrer le d'abord pour $t \in \mathbb{N}^*$, puis pour $t \in \mathbb{Q}_+^*$ et enfin pour $t \in \mathbb{R}_+^*$).

(c) Conclure.

3. Justifier le terme "sans mémoire". On pourra calculer $P(T > s + t|T > s)$.

**Exercice 7 - Minimum de deux lois exponentielles** - *L2* - ⋆⋆

Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètres respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$. On pose $Y = \min(X_1, X_2)$.

1. Pour tout réel $y$, calculer $\mathbb{P}(Y > y)$. En déduire que $Y$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
2. Deux guichets sont ouverts à une banque. Le temps de service au premier guichet (resp. au deuxième) suit une loi exponentielle de moyenne 20 min (resp. 30 min). Deux clients rentrent simultanément, l'un choisit le guichet 1 et l'autre le guichet 2. En moyenne, après combien de temps sort le premier ?
3. En moyenne, après combien de temps sort le dernier ?

**Exercice 8 - Lien entre lois exponentielles et lois géométriques** - *L2* - ⋆⋆

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On note $Y = \lceil X \rceil$ sa partie entière "supérieure", c'est-à-dire que $\lceil 1.5 \rceil = 2$ et $\lceil 3 \rceil = 3$.

1. Démontrer que $Y$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
2. On note $Z = Y - X$. Quelle est sa fonction de répartition ?
3. En déduire que $Z$ est une variable aléatoire à densité dont la densité est

$$f(x) = \frac{e^x}{e-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

**Exercice 9 - Uniforme et binomiale** - *L2/L3/ECS* - ⋆⋆⋆

Soient $X_0, \dots, X_n$ des variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$, indépendantes.

1. Soit $0 \leq k \leq n$ et soit $U_k = \min(X_0, \dots, X_k)$. Démontrer que $U_k$ admet une densité que l'on déterminera.
2. Soit $N$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$. Démontrer que $U = \min(X_0, \dots, X_N)$ admet une densité que l'on déterminera.

## AUTRES LOIS

**Exercice 10 - Exponentiel des deux côtés !** - *Oral ESCP* - ⋆

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} a.3^{-x} & \text{si } x > 0 \\ a.3^{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Déterminer $a$ pour que $f$ soit une densité de probabilité.

2. Soit $X$ une variable aléatoire admettant $f$ pour densité. Déterminer la fonction de répartition de $X$. Montrer que $X$ admet une espérance $E(X)$ et la calculer.
3. On pose $Y = 3^X$. Déterminer la fonction de répartition de $Y$. $Y$ admet-elle une espérance ?

**Exercice 11 - Loi de Laplace** - *L2* - $\star$

On considère une variable aléatoire $X$ dont la densité est donnée par

$$f(x) = ce^{-|x|}.$$

1. Calculer $c$.
2. Démontrer que $X$ admet des moments de tout ordre. Les calculer.

**Exercice 12 - Loi log-normale** - *L2* - $\star\star$

Soient $m, \sigma$ deux réels. On dit que $X$ suit une loi log-normale de paramètres $(m, \sigma^2)$ si $Y = \ln X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On supposera dans la suite $m = 0$ et $\sigma = 1$.

1. Exprimer la fonction de répartition de $X$ à l'aide de la fonction de répartition $\phi$ de la loi normale centrée réduite.
2. Calculer sa densité.
3. Démontrer que $E(X) = \sqrt{e}$.

**Exercice 13 - Etude d'une densité** - *Oral ESCP* - $\star\star$

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

1. Montrer que $f$ est une densité de probabilité. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X$ ayant $f$ pour densité.
2. Soit $\varphi$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

   Etudier les variations de $\varphi$. Montrer que $\varphi$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$, et déterminer sa bijection réciproque.
3. On définit une variable aléatoire $Y$ par :

$$Y = \varphi(X) = \frac{e^X - 1}{e^X + 1}.$$

   Déterminer la fonction de répartition et une densité de $Y$.

**Exercice 14 - Entropie** - *L2* - $\star\star\star$

Si $X$ est une variable aléatoire admettant une densité $f$, on appelle entropie de $X$ la quantité suivante (si elle existe)

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln f(x) dx.$$

1. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.

2. Calculer l'entropie d'une variable aléatoire uniforme.
3. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Démontrer que
$$h(X) = \frac{1}{2}\left(1 + \ln(2\pi\sigma^2)\right).$$
4. On souhaite prouver que, parmi les variables aléatoires de variance donnée, les lois normales sont celles qui admettent une entropie maximale. On fixe donc $Y$ une variable aléatoire centrée, de densité $f$ et de variance $\sigma^2$, admettant une entropie. On note $\varphi$ la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On supposera dans la suite que la fonction
$$x \mapsto f(x) \ln \frac{\varphi(x)}{f(x)}$$
est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Vérifier que
$$h(Y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \ln \frac{\varphi(x)}{f(x)} dx - \int_{\mathbb{R}} f(x) \ln \varphi(x) dx.$$
5. En déduire que $h(Y) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \ln(2\pi\sigma^2)\right)$.

**Exercice 15 - Produit de lois de Pareto** - *L3/M1* - ⋆

On dit que la variable aléatoire $X$ suit une loi de Pareto de paramètre $\alpha > 0$ si,
$$\forall x \geq 1,\ P(X > x) = x^{-\alpha}.$$

1. Démontrer que cette propriété caractérise effectivement la loi de $X$. Montrer que $X$ suit une loi à densité, et préciser cette densité.
2. Pour quelles valeurs de $\alpha$ la variable $X$ est-elle d'espérance finie ?
3. Soient $X, Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Pareto de paramètre $\alpha$. On note $dP_Y$ la loi de $Y$. Montrer que, si $t \geq 1$, alors
$$P(XY > t) = \int_1^{+\infty} P\left(X > \frac{t}{y}\right) dP_Y(y).$$
4. En déduire que, pour tout $t \geq 1$, $P(XY > t) = t^{-\alpha}(1 + \alpha \ln t)$.

## EXERCICES PRATIQUES

**Exercice 16 - Tailles** - *L2* - ⋆

La taille d'un homme âgé de 25 ans suit une loi normale de moyenne 175cm et d'écart-type 6cm.

1. Quel est le pourcentage d'hommes ayant une taille supérieure à 1m85 ?
2. Parmi les hommes mesurant plus de 1m80, quelle proportion mesure plus de 1m92 ?

**Exercice 17 - Chaîne de fabrication** - *Concours Ecricome* - ⋆

Une usine fabrique des cadres de vélo. Pour qu'une pièce soit terminée, il faut qu'elle passe par la chaîne $A$ puis par la chaîne $B$. Le temps de passage exprimé en minutes pour un objet sur la chaîne $A$ est une variable aléatoire $M$ suivant une loi exponentielle de paramètre 2. Le temps de passage exprimé en minutes pour un objet sur la chaîne $B$ est une variable aléatoire $N$ suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ Les variables $M$ et $N$ sont indépendantes.

1. Rappeler l'expression d'une densité de probabilité $v$ de $M$ et d'une densité $w$ de $N$.
2. On note $S$ la variable aléatoire représentant le temps total de fabrication d'une pièce. Exprimer $S$ en fonction de $M$ et de $N$ et déterminer le temps moyen de fabrication d'une pièce.

**Exercice 18 - Pannes** - *L2/L3/ECS* - ⋆⋆

Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes. On considère les variables aléatoires $X_1, X_2$ et $X_3$ définies par : $X_1$ est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la mise en route de la machine et la première panne. $X_2$ (resp. $X_3$), est le temps, en heures, écoulé entre la remise en route de la machine après la première (resp. la deuxième) panne et la panne suivante. On suppose que les variables aléatoires $X_1, X_2$ et $X_3$ sont indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre 1/2.

1. Quelle est la durée moyenne de fonctionnement entre deux pannes consécutives ?
2. Soit $E$ l'événement : "chacune des 3 périodes de fonctionnement de la machine dure plus de 2 heures". Calculer $P(E)$.
3. Soit $Y$ la variable aléatoire égale à la plus grande des 3 durées de fonctionnement de la machine sans interruption.
   (a) Calculer $P(Y \leq t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Déterminer une densité de $Y$.
   (c) Pour $a < 0$, calculer $\int_0^{+\infty} te^{at}dt$.
   (d) Démontrer que la variable aléatoire $Y$ admet une espérance, dont on calculera, en heures et minutes, la valeur.

**Exercice 19 - La station-service** - *L2* - ⋆

Dans une station-service, la demande hebdomadaire en essence, en milliers de litres, est une variable aléatoire $X$ de densité $f(x) = c(1-x)^4\mathbf{1}_{[0,1]}$.

1. Déterminer $c$.
2. La station est réapprovisionnée chaque lundi à 20h. Quelle doit être la capacité du réservoir d'essence pour que la probabilité d'épuiser ce réservoir soit inférieure à $10^{-5}$ ?