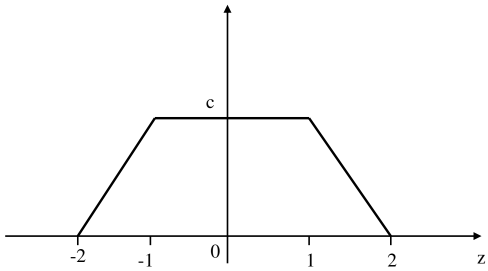
TD 3

Variables aléatoires (absoluement continue) réelles

Exercice 1

Une variable aléatoire X est munie d'une densité de probabilité représentée sur la figure 1. Calculer la probabilité $P\left(-1.5 \leq X \leq 1.5\right)$ (ne pas oublié de remplacer c par sa valeur).



Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_X\left(x\right) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} \text{ si } x \geq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

1. Vérifier que f_X est une densité de probabilité. Indice : une IPP ne marchera pas ici (dite pourquoi ?), on peut soit trouver une primitive directement, soit utiliser le changement de variable $y = x^2$.
2. Soit X une variable aléatoire absoluement continue dont la loi a pour densité f_X. Calculer la densité, $f_Y\left(y\right)$, de la variable aléatoire $Y = X^2$.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire absoluement continue admettant la densité de probabilité suivante :

$$f_X\left(x\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1, \\ c\frac{1}{x^{c+1}} \text{ si } x \geq 1, \end{cases}$$

avec $c > 0$.

1. Démontrer que $f_X\left(x\right)$ est bien une densité de probabilité. Tracer l'allure de $f_X\left(x\right)$.
2. Pour quelle valeur de c a t'on $X \in L^1$. Calculer $\mathbb{E}\left(X\right)$ dans ce cas.
3. Pour quelle valeur de c a t'on $X \in L^2$. Calculer la variance de X dans ce cas.
4. Calculer la fonction de répartition $F_X(x)$ et tracer son allure.
5. Sur les graphe de la question 1 et 4 représenter la probabilité $P\left(2 \leq X \leq 3\right)$.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire de Cauchy c'est-à-dire que $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
1. Démontrer que $f_X(x)$ est bien une densité de probabilité. Tracer l'allure de $f_X(x)$.
2. Est-ce que $X \in L^1$? Si oui, calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. Déterminer la loi de $Y = \frac{1}{X}$.

Exercice 5

Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. La densité

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}};\ x \in [0, +\infty[\ \ (0 \text{ sinon})$$

est appelée loi du chi 2 à $k \in \mathbb{N}^*$ degrés de liberté et est notée $\chi^2(k)$. On rappel que la fonction gamma est donnée par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

et que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
1. Montrer que X_1^2 suit la loi $\chi^2(1)$.
2. Montrer que $X_1^2 + X_2^2$ suit la loi $\chi^2(2)$.

Exercice 6

Si X est une variable aléatoire admettant une densite f_X, on appelle entropie[1] de X la quantite suivante (si elle existe)

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, ln f_X(x)\, dx$$

1. Demontrer que, pour tout $x > 0$, $ln(x) \leq x - 1$.
2. Calculer l'entropie d'une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$.
3. On suppose que $X \sim \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$. Demontrer que $h(X) = \frac{1}{2}\left(1 + ln\left(2\pi\sigma^2\right)\right)$.

4. On souhaite prouver que, parmi les variables aléatoires de variance donnée, les lois normales sont celles qui admettent une entropie maximale. On fixe donc Y une variable aléatoire centrée, de densité f_Y et de variance σ^2, admettant une entropie. On note φ la densité de probabilité de $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On supposera dans la suite que la fonction $y \mapsto f(y)\, ln\frac{\varphi(y)}{f(y)}$ est integrable sur $\mathbb{R}$. Vérifier que

$$h(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, ln\frac{\varphi(y)}{f_Y(y)} dy - \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, ln\varphi(y)\, dy$$

5. En deduire que $h(Y) \leq \frac{1}{2}\left(1 + ln\left(2\pi\sigma^2\right)\right)$.

1. L'entropie de Shannon est utilisée pour numériser une source en utilisant le minimum possible de bits sans perte d'information. Si le canal de transmission de l'information a une capacité de C bits par seconde et si les symboles qu'envoie la source ont une entropie H, alors la vitesse maximale de transmission des symboles est de C/H symboles par seconde, cette vitesse pouvant être approchée d'aussi près que l'on veut au moyen d'un système de codage adéquat des symboles.