université PARIS-SACLAY

FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

Recueil d'exercices de mathématiques pour le L3 E3A

Avertissement

Ce document [1] présente une collection d'exercices de (calcul) mathématiques de degré de difficulté variable allant du collège/lycée à la L2. Il s'agit du socle de base minimale normalement requis pour un étudiant de la Licence E3A à l'Université Paris-Saclay. Ces exercices (très) courts constituent donc une base de révision pour l'étudiant lors de son entrée en L3 et ce focalisent sur les thèmes où l'équipe pédagogique a constaté le plus grand nombre de lacunes chez les étudiants [2]. Il ne s'agit pas d'exercices sans finalité mais bel et bien de mathématiques utiles à l'étude du génie électrique. Ainsi, de nombreuses formules seront réutilisés « en pratique » dans divers modules au cours de l'année (automatique, probabilités, traitement du signal, électronique analogique et numérique), mais aussi servirons de base pour le cours spécifique de mathématique (analyse fonctionnelle) de l'année de L3 ainsi qu'en M1 E3A (automatique, traitement d'images, robotique, intelligence artificielle, télécommunications). Enfin et surtout, si l'un des concepts (ou une notation) présent dans ce document n'est pas connu d'un étudiant au début de l'année du L3, il doit immédiatement en informer les professeurs du cours de remise à niveau afin de ne pas être pénalisé pour la suite (les autres enseignants ne pourront pas, par manque de temps, revenir sur les concepts présenté ici).

Remarques sur les indices et les variables : afin de ne pas être esclave des notations et d'être capable de manipuler toutes sortes de symboles, nous utiliserons différents indices/variables (parfois au sein d'un même exercice). Par exemple, les fonctions seront définies parfois suivant la variable x, parfois suivant la variable y. Les sommes et séries utiliserons les indices k ou n. Nous utiliserons également des majuscules et minuscules, il conviendra donc, par exemple de ne pas confondre au sein d'une même formule les quantités n et N. Ainsi, l'étudiant doit en premier lieu être attentif à ce que représente les différentes quantités pour savoir quelle est la variable d'une limite, somme, dérivée, intégrale, etc.

1. Les remarques concernant les erreurs contenues dans ce document peuvent être adressées à alexandre.renaux@universite-paris-saclay.fr

2. En conséquence, il n'est pas question ici d'être exhaustif et certaines notions ne seront pas abordées car supposées généralement bien connues par les étudiants (exemples : calcul des racines d'un polynôme d'orde deux, identités remarquables simples, trigonométrie, primitives et dérivées « simples » et généralement tout ce qui relève du programme pré-baccalaureat). D'autres thématiques importantes (par exemple les équations différentielles, valeurs/vecteurs propres, d'autres calculs d'intégrales/limites, espaces vectoriels, etc) seront également étudiée lors des cours de remises à niveau.

Table des matières

Chapitre 1

Analyse

Remarque : certain exercices nécessitent la manipulation de factorielles, on trouvera quelques exercices de manipulations de cet opérateur au chapitre 33.4.

1.1 Récurrences

— Démontrer que $\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{N(N-1)}{2}$. Remarque : la démonstration peut se faire sans récurrence en étant astucieux, mais le but est de s'entraîner ici.

Une première remarque est de constater que $\sum_{n=0}^{N-1} n = \sum_{n=1}^{N-1} n$. De plus [1], en posant $N = 3$, on vérifie facilement que $\sum_{n=1}^{2} n = 1 + 2 = 3 = \frac{3(3-1)}{2}$. Supposons que $\sum_{n=0}^{N-2} n = \frac{(N-1)(N-2)}{2}$ et cherchons

$$\sum_{n=0}^{N-1} n = \sum_{n=0}^{N-2} n + (N-1) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} + (N-1) = (N-1)\left(\frac{(N-2)}{2} + 1\right)$$
$$= \frac{N(N-1)}{2}$$

■

— Démontrer que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

On vérifie facilement que $1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2$. Supposons que $\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right)^2$ et cherchons

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n-1} k^3 + n^3 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right)^2 + n^3 = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 + n^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$
$$= \frac{n^2\left(n^2 + 2n + 1\right)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

■

— Démontrer que $\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{N(2N-1)(N-1)}{6}$.

Une première remarque est de constater que $\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \sum_{n=1}^{N-1} n^2$. En posant $N = 3$, on vérifie que $\sum_{n=1}^{2} n^2 = 1^2 + 2^2 = 5 = \frac{3(6-1)(3-1)}{6}$. Supposons que $\sum_{n=0}^{N-2} n^2 =$

1. Evidement en posant $N = 2$, on vérifie rapidement que $\sum_{n=1}^{1} n = 1 = \frac{2(2-1)}{2}$, mais il est toujours bon de vérifier au moins deux termes dans une relation.

$\frac{(N-1)(2(N-1)-1)(N-2)}{6} = \frac{(N-1)(2N-3)(N-2)}{6}$ et cherchons

$$\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \sum_{n=0}^{N-2} n^2 + (N-1)^2 = \frac{(N-1)(2N-3)(N-2)}{6} + (N-1)^2$$
$$= \frac{(N-1)((2N-3)(N-2)+6(N-1))}{6} = \frac{(N-1)N(2N-1)}{6}$$

■

— Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$ Remarque : il s'agit de la très importante suite géométrique, la démonstration peut se faire sans récurrence en étant astucieux, mais le but est de s'entraîner ici.

Remarque préliminaire : attention, ici et contrairement à ci-avant $\sum_{k=0}^{n} x^k \neq \sum_{k=1}^{n} x^k$. En posant $n = 1$, on a $\sum_{k=0}^{1} x^k = x^0 + x^1 = 1 + x$ et $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1 + x$, où on a utilisé l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$. Supposons que $\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$ et cherchons

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k + x^n = \frac{1-x^n}{1-x} + x^n = \frac{1-x^n+(1-x)x^n}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

■

1.2 Manipulation de sommes et séries

On supposera toute les séries de cet exercice convergentes (une mise au point sur la convergence des séries sera vu lors de l'UE 301 Analyse Fonctionnelle).

— Sans refaire tous les calculs, utiliser les résultats précédents pour calculer $\sum_{k=1}^{N} k$ et $\sum_{k=2}^{N} k^2$.

Puisque $\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{N(N-1)}{2} = \sum_{n=1}^{N-1} n$, il suffit de poser $N' = N-1$ donc $N = N'+1$. De plus, N' et n étant des variables muettes (c'est-à-dire que N' va jouer le rôle de N et k va jouer le rôle de n) on a directement $\sum_{k=1}^{N} k = \frac{(N+1)N}{2}$. Concernant $\sum_{k=2}^{N} k^2$, il faut d'abord remarquer que $\sum_{k=2}^{N} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{N} k^2\right) - 1^2$. Or $\sum_{k=1}^{N} k^2$ce calcul de la même manière en posant $N' = N-1$ dans le résultat de $\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \sum_{n=1}^{N-1} n^2$. On obtient

$$\sum_{k=2}^{N} k^2 = \frac{(N+1)(2(N+1)-1)N}{6} - 1 = \frac{(N+1)(2N+1)N-6}{6}$$

. Une dernière remarque d'ordre pratique lorsque l'on cherche à démontrer ce type d'égalité et de faire le test avec quelques valeurs (même si cela n'assure pas de la véracité du résultat). Ici par exemple, avec $N = 4$, on a d'une part $\sum_{k=2}^{4} k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 = 29$ et $\frac{(4+1)(2*4+1)*4-6}{6} = \frac{5*9*4-6}{6} = \frac{174}{6} = 29$. ■

— Sans refaire tous les calculs, utiliser les résultats précédents pour démontrer que $\sum_{k=\alpha_1}^{\alpha_2} x^k = x^{\alpha_1} \frac{1-x^{\alpha_2-\alpha_1+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$.

On sait que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$. Donc il faut réussir à écrire $\sum_{k=\alpha_1}^{\alpha_2} x^k$ de la même manière. Remarquons simplement que $\sum_{k=\alpha_1}^{\alpha_2} x^k = \sum_{k=0}^{\alpha_2} x^k - \sum_{k=0}^{\alpha_1-1} x^k$ et on obtient

$$\sum_{k=\alpha_1}^{\alpha_2} x^k = \frac{1-x^{\alpha_2+1}}{1-x} - \frac{1-x^{\alpha_1}}{1-x} = \frac{x^{\alpha_1}-x^{\alpha_2+1}}{1-x}.$$

Le résultat est obtenu en factorisant par x^{α_1}.■

— Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$ (et en déduire trivialement $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{-n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n x^{-n}$).

Remarque : ici le résultat ne peut pas être obtenu à partir d'un raisonnement par récurrence car il s'agit d'une série. Néanmoins, sachant que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, ou encore $\sum_{n=0}^{p} x^n = \frac{1-x^{p+1}}{1-x}$ puisque k est une variable muette, on a directement $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \underset{p\to+\infty}{lim} \sum_{n=0}^{p} x^n = \underset{p\to+\infty}{lim} \frac{1-x^{p+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ puisque $\underset{p\to+\infty}{lim} x^{p+1} = 0$ si $|x| < 1$. On aurait aussi pu écrire

$$(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - x\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - x^{n+1}$$

$$= 1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + x^3 - \cdots = 1$$

à condition que la série converge (ce qui est le cas ssi $|x| < 1$).■

— Utiliser le résultat précédent pour démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ pour $|x| < 1$. Indice : dériver l'égalité précédente à gauche et à droite par rapport à x.

Puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, on a

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{dx^n}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2} \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Il suffit ensuite de remarquer que $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$. ■

— Utiliser les deux résultats précédents pour calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k}$.

On a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ avec le changement de variable $n = k + 1$(attention aux bornes). Puisque l'on sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$, on identifie ici $x = \frac{1}{2}$ et on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$$

Pour la deuxième série, on sait que $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, il suffit donc de remarquer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}$ puis d'écrire

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

■

— Sachant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, calculer les séries suivantes $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}e^{-x}$,$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{(k+2)!}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{iun}\frac{\theta^n}{n!}e^{-\theta}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}e^{-x} = e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = xe^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = xe^{-x}e^x = x$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} - \frac{x^0}{0!}\right) = \frac{1}{x}\left(e^x - 1\right)$$

où on a utilisé le changement de variable $k = n + 1$ (attention aux bornes).

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{(k+2)!} = \frac{1}{y^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{1}{y^2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} = \frac{1}{y^2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} - \frac{y^0}{0!} - \frac{y^1}{1!} \right) = \frac{1}{y^2} \left(e^y - 1 - y\right)$$

où on a utilisé le changement de variable $n = k + 2$ (attention aux bornes).

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{iun} \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta} = e^{-\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{iun} \frac{\theta^n}{n!} = e^{-\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\theta e^{iu}\right)^n}{n!} = e^{-\theta} e^{\theta e^{iu}}$$

puisque $e^{iun} = \left(e^{iu}\right)^n$.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} = e^1 - 2 = e - 2$$

■

1.3 Limites

Calculer les limites suivantes : on rappel que $ln\,(1 + x) = x$ au voisinage de 0.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} sin\,(x)\, e^{-x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(x+1)^2}{10 + x(x+1)^2}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x+1)(x+10)^2}{1 + 10x(x+100)^2}$
4. $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{(2k+1)^2}{k(k+1)}$
5. $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{(k+2)^3}{k^2}$
6. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^2 n!}{n^2 (n+1)!}$
7. $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{(k+1)^2}{k!}$
8. $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(1 - \frac{x}{k}\right)^n$
9. $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k$
10. $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(1 - \frac{\theta^2}{2k}\right)^k$
11. $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(1 - \frac{x}{k^2}\right)^k$
12. $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1}$
13. $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{n=1}^{k} x$
14. $\lim\limits_{k \to +\infty} \int_{\epsilon}^{+\infty} k e^{-kx} dx$, $\epsilon > 0$
15. $\lim\limits_{k \to +\infty} x^k$

La dernière limite doit être discutée selon les valeurs de x.

On a

$$\lim_{x \to +\infty} sin\,(x)\, e^{-x} = 0$$

car $sin\,(x)$ est bornée et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^2}{10 + x\,(x+1)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)\,(x+10)^2}{1 + 10x\,(x+100)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{10x^3} = \frac{1}{10}$$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{(2k+1)^2}{k\,(k+1)} = \lim_{k \to +\infty} \frac{4k^2}{k^2} = 4$$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{(k+2)^3}{k^2} = \lim_{k \to +\infty} \frac{k^3}{k^2} = \lim_{k \to +\infty} k = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^2 n!}{n^2\,(n+1)!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2\,(n+1)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{(k+1)^2}{k!}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k^2}{k!}=0$$

car $k^2 \underset{+\infty}{=} o(k!)$, c'est-à-dire que k^2 est négligeable devant $k!$ en $+\infty$ (rappelez vous que n'importe quel polynôme est négligeable devant l'opération factorielle en $+\infty$).

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{x}{k}\right)^n=\lim_{k\to+\infty}(1)^n=1$$

car $\lim_{k\to+\infty}\frac{x}{k}=0$ et n **est une constante (seul** k **tend vers l'infini).**

L'étude de la limite $\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{x}{k}\right)^k$ doit être traitée avec attention (ainsi que les trois limites suivantes) car on a à la fois un terme en $\frac{1}{k}$ qui tend vers zéro et un terme en puissance de k qui tend vers l'infini. Ce type de lite se traite en utilisant le logarithme et l'exponentielle pour leurs propriétés relative aux puissances. Il s'agit d'une astuce/méthode que l'étudiant doit avoir en tête lorsqu'il aborde ce type d'exercices. On a

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{x}{k}\right)^k=\lim_{k\to+\infty}e^{ln\left(1-\frac{x}{k}\right)^k}=\lim_{k\to+\infty}e^{kln\left(1-\frac{x}{k}\right)}$$

Puisque $ln\,(1+x)=x$ au voisinage de 0, on a $\lim_{k\to+\infty}ln\left(1-\frac{x}{k}\right)=\lim_{k\to+\infty}-\frac{x}{k}$ et il vient

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{x}{k}\right)^k=\lim_{k\to+\infty}e^{kln\left(1-\frac{x}{k}\right)}=\lim_{k\to+\infty}e^{-k\frac{x}{k}}=e^{-x}$$

On procède de façon similaire pour les trois limites suivantes :

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{\theta^2}{2k}\right)^k=\lim_{k\to+\infty}e^{kln\left(1-\frac{\theta^2}{2k}\right)}=\lim_{k\to+\infty}e^{k\left(-\frac{\theta^2}{2k}\right)}=e^{-\frac{\theta^2}{2}}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{x}{k^2}\right)^k=\lim_{k\to+\infty}e^{kln\left(1-\frac{x}{k^2}\right)}=\lim_{k\to+\infty}e^{-k\frac{x}{k^2}}=e^0=1$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-1}=\lim_{k\to+\infty}e^{(k-1)ln\left(1-\frac{1}{k}\right)}=\lim_{k\to+\infty}e^{-\frac{k-1}{k}}=\frac{1}{e}$$

Les deux limites suivantes font intervenir une somme et une intégrale. Attention, on inverse pas en générale le signe limite et le signe somme ou intégrale. On a

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k^2}\sum_{n=1}^{k}x=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k^2}kx=\lim_{k\to+\infty}\frac{x}{k}=0$$

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\epsilon}^{+\infty}ke^{-kx}dx=\lim_{k\to+\infty}\left[-e^{-kx}\right]_{\epsilon}^{+\infty}=\lim_{k\to+\infty}e^{-k\epsilon}=0$$

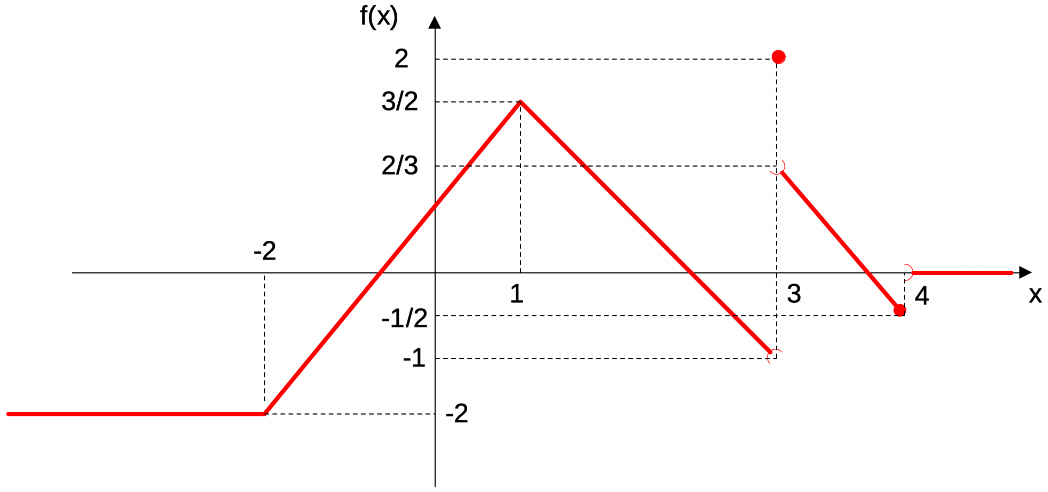
Enfin

$$\lim_{k\to+\infty}x^k=\begin{cases}0\ si\ |x|<1\\ 1\ si\ x=1\\ indeterminé\ si\ x=-1\\ \infty\ sinon\end{cases}$$

■

1.4 Droites

Donner l'équation de la fonction $f(x)$ représentée sur la figure suivante :



Donner également les valeurs de x telles que $f(x) = 0$.

Une telle fonction se représente par morceaux, il n'y a donc pas une seule équation mais plusieurs selon les valeurs de x. Les différentes valeurs à analyser sont (attention à l'inclusion ou non des points) lorsque $x \leq -2$, $-2 \leq x \leq 1$, $1 \leq x < 3$, $x = 3$, $3 < x \leq 4$ et $x > 4$. Si $x \leq -2$ on a facilement $f(x) = -2$. Si $-2 \leq x \leq 1$, il s'agit de l'équation d'une droite, donc de type $f(x) = ax + b$ avec $a = \frac{\frac{3}{2}-(-2)}{1-(-2)} = \frac{7}{6}$ et $b = -2 + 2 * \frac{7}{6} = \frac{1}{3}$. Si $1 \leq x < 3$, il s'agit également de l'équation d'une droite de type $f(x) = ax + b$ avec $a = -\frac{\frac{3}{2}-(-1)}{3-1} = -\frac{5}{4}$ et $b = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} = \frac{11}{4}$. Lorsque $x = 3$, on lit directement que $f(x) = 2$. Lorsque $3 < x \leq 4$, nous avons encore affaire à l'équation d'une droite de type $f(x) = ax+b$ avec $a = -\frac{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{4-3} = -\frac{7}{6}$ et $b = \frac{2}{3} + 3 * \frac{7}{6} = \frac{25}{6}$. Enfin, lorsque $x > 4$, on lit facilement que $f(x) = 0$. On résume l'expression de $f(x)$ de la manière suivante :

$$f(x) = \begin{cases} -2 \; si \; x \leq -2 \\ \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} \; si \; -2 \leq x \leq 1 \\ -\frac{5}{4}x + \frac{11}{4} \; si \; 1 \leq x < 3 \\ 2 \; si \; x = 3 \\ -\frac{7}{6}x + \frac{25}{6} \; si \; 3 < x \leq 4 \\ 0 \; si \; x > 4 \end{cases}$$

Les valeurs de x telles que $f(x) = 0$ sont, bien sûre $x > 4$ et telle que $\frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{2}{7}$, $-\frac{5}{4}x + \frac{11}{4} = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{11}{5}$ et $-\frac{7}{6}x + \frac{25}{6} = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{25}{7}$. On résume cela de la manière suivante

$$f(x) = 0 \, pour \; x \in \left\{ \left\{-\frac{2}{7}\right\} \cup \left\{\frac{11}{5}\right\} \cup \left\{\frac{25}{7}\right\} \cup]4, +\infty[\right\}$$

■

1.5 Analyse de fonctions

Tracer approximativement les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$ sans l'étude d'un tableau de signe, mais simplement en utilisant vos connaissances sur les fonctions "simples" (polynôme, exponentielle, etc.)

1. $f_1(x) = e^{-\alpha x}$
2. $f_2(x) = x^2 - 4$
3. $f_3(x) = \frac{1}{e^{x+2}}$
4. $f_4(x) = e^{-|x-1|}$
5. $f_5(x) = -(x-1)^2$
6. $f_6(x) = \frac{1}{x} + 3$
7. $f_7(x) = \frac{1}{x^5}$
8. $f_8(x) = \sqrt{x+2}$
9. $f_9(x) = \sqrt{x} + 2$
10. $f_{10}(x) = \left|(x+1)^2 - 10\right|$
11. $f_{11}(x) = \frac{sin(\alpha x)}{\alpha x}$
12. $f_{12}(x) = -2|x| + 3$

Les résultats ci-dessous sont donné pour vérification, mais le but de cet exercice est d'apprendre à tracer approximativement (et rapidement) les fonctions à partir de connaissance sur des fonctions simples. Par exemple, pour $f_2(x)$ on pourra commencer par se rappeler comment tracer x^2 puis comment "décaler" une fonction pour terminer le tracé. On peut également utiliser des points particuliers pour effectuer un tracé.

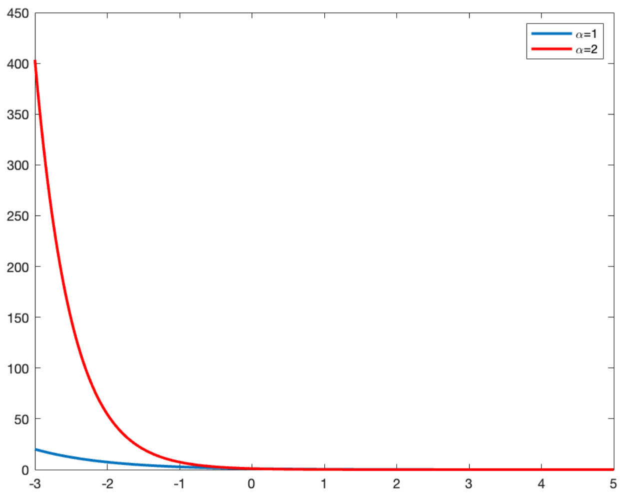


FIGURE 1.1: $f_1(x) = e^{-\alpha x}$

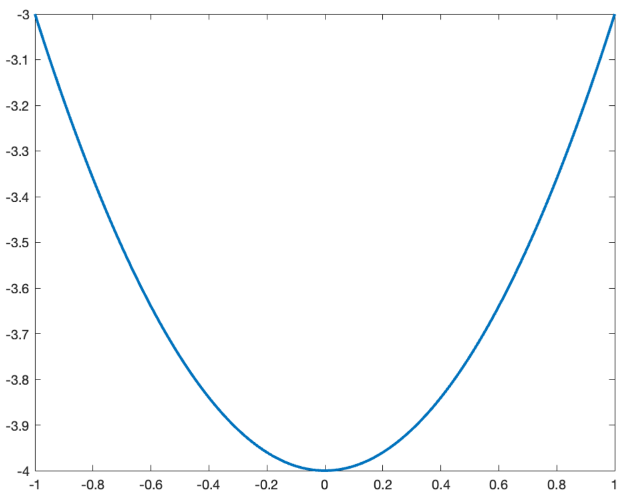


FIGURE 1.2: $f_2(x) = x^2 - 4$

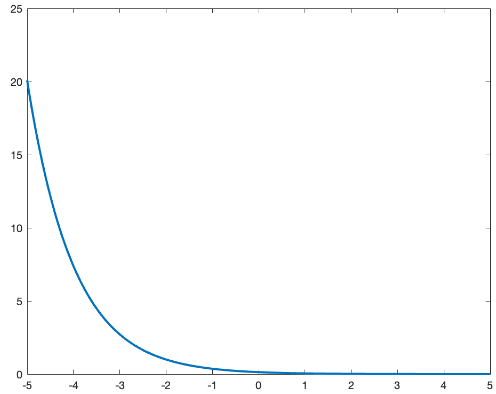


FIGURE 1.3: $f_3\left(x\right) = \frac{1}{e^{x+2}}$

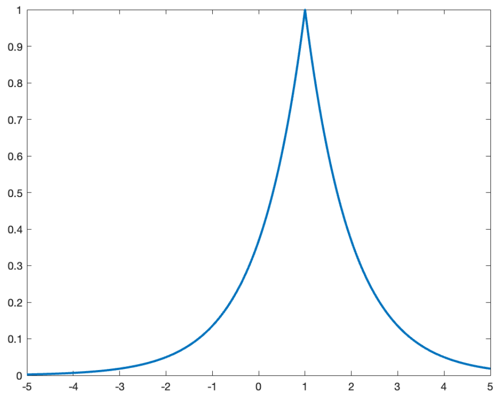


FIGURE 1.4: $f_4\left(x\right) = e^{-|x-1|}$

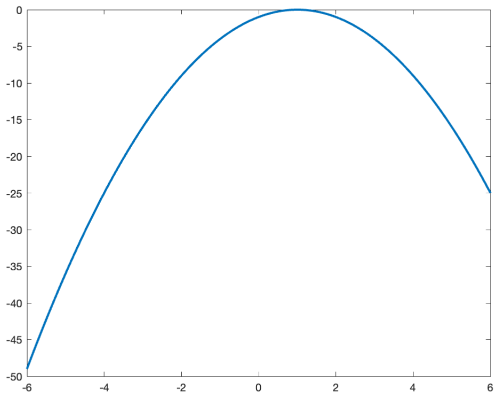


FIGURE 1.5: $f_5\left(x\right) = -\left(x-1\right)^2$

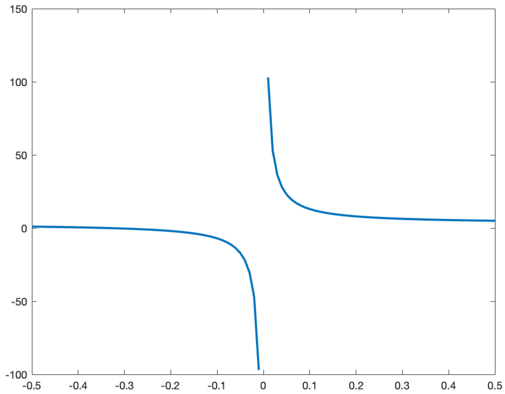


FIGURE 1.6: $f_6(x) = \frac{1}{x} + 3$

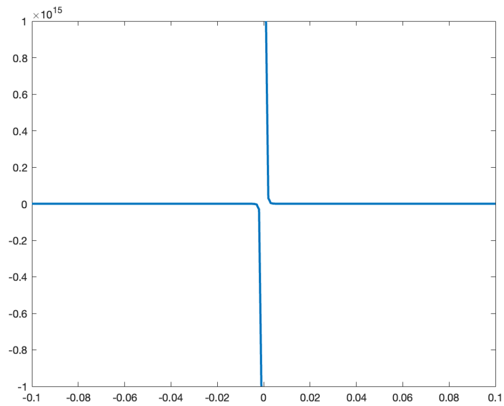


FIGURE 1.7: $f_7(x) = \frac{1}{x^5}$

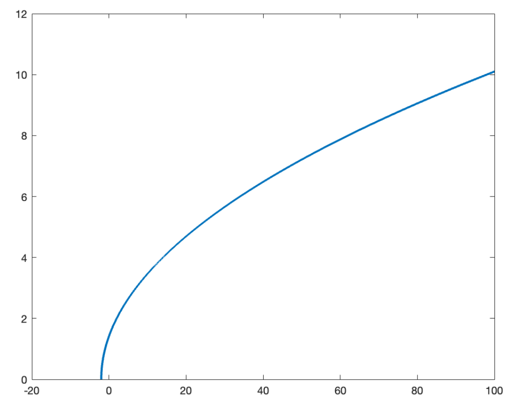


FIGURE 1.8: $f_8(x) = \sqrt{x+2}$

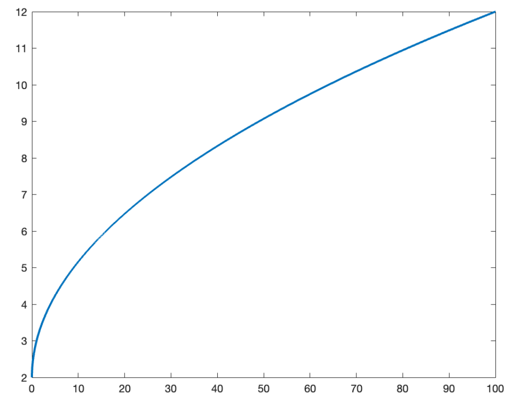


FIGURE 1.9: $f_9\left(x\right) = \sqrt{x} + 2$

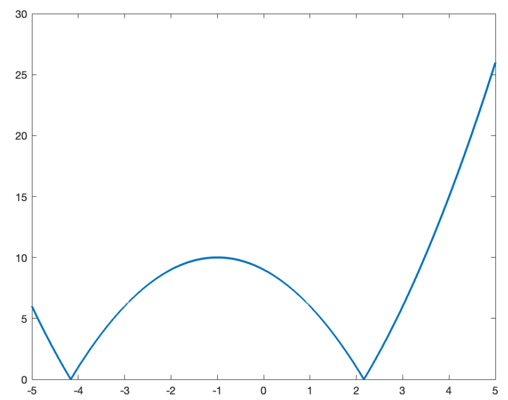


FIGURE 1.10: $f_{10}\left(x\right) = \left|\left(x+1\right)^2 - 10\right|$

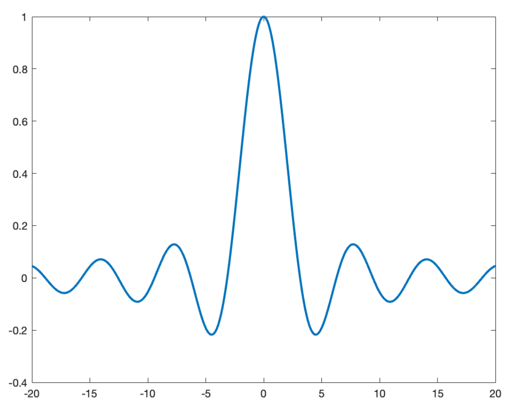


FIGURE 1.11: $f_{11}\left(x\right) = \frac{sin(\alpha x)}{\alpha x}$

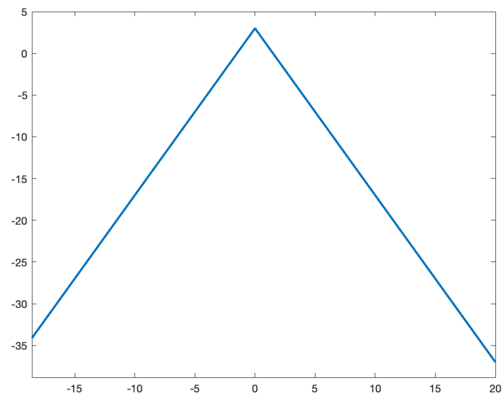


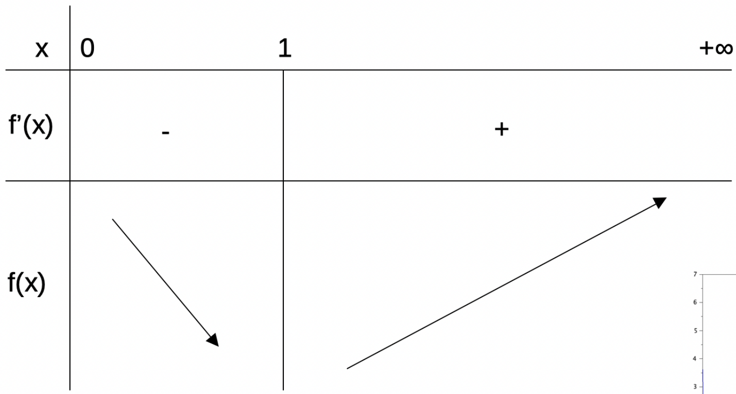
FIGURE 1.12: $f_{12}(x) = -2|x| + 3$

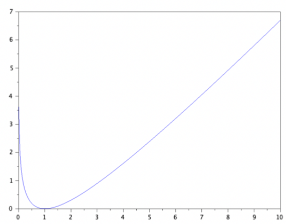
■

— A l'aide d'un tableau de signe, étudier la fonction $f(x) = x - 1 - ln(x)$ sur $]0, +\infty[$, en déduire que $ln(x) \leq x - 1$.

Il nous faut la dérivée de $f(x)$ ainsi que son signe, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \begin{cases} > 0 \; si \; x > 1 \\ = 0 \; si \; x = 1 \\ < 0 \; si \; x \in]0, 1[\end{cases}$.

On a de plus $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $f(1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On obtient donc le tableau suivant

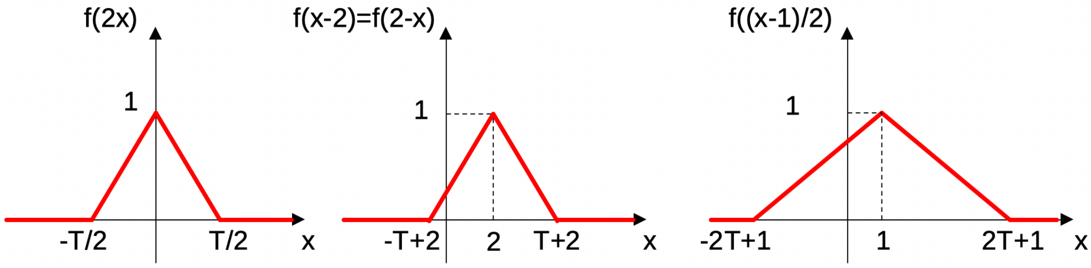




Et en en déduis que $f(x) \geq 0$ d'où $ln(x) \leq x - 1$.■

— Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{T} \; si \; |x| \leq T \\ 0 \; sinon \end{cases}$. Tracer, en fonction de x, les fonctions $f(x)$, $f(2x)$, $f(x-2)$, $f(2-x)$ et $f\left(\frac{x-1}{2}\right)$.

On se rappelle que $|x| = \begin{cases} x \; si \; x \geq 0 \\ -x \; si \; x \leq 0 \end{cases}$, donc $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{T} \; si \; 0 \leq x \leq T \\ 1 + \frac{x}{T} \; si \; -T \leq x \leq 0 \\ 0 \; sinon \end{cases}$. On reconnait l'équation de deux segments passant par les points $(0, 1)$ à $(T, 0)$ et par les points $(0, 1)$ à $(-T, 0)$, c'est-à-dire un triangle entre $x = -T$ et $x = T$. Les quatre autres fonctions à tracer ne change pas la « nature » triangulaire de la fonction initiale puisque, pour n'importe quelle droite $g(x) = \alpha x + \beta$, la fonction $g(\alpha' x + \beta') = \alpha\alpha' x + \alpha\beta' + \beta$ est toujours une droite. Il suffit donc d'étudier ici le support de chaque fonctions pour pouvoir les tracer. Pour $f(2x)$, on a donc comme support $-T \le 2x \le T$ et donc $-\frac{T}{2} \le x \le \frac{T}{2}$. Pour $f(x-2)$, on a $-T \le x-2 \le T$ et donc $-T+2 \le x \le T+2$ (on aurait aussi pu utiliser l'argument que pour une fonction $g(x)$ donnée, la fonction $g(x+\alpha)$ est la translatée à **gauche** (**droite**) de $g(x)$ si α est positif (respectivement négatif)). Pour $f(2-x)$ on a $-T \le 2-x \le T$ donc $-T+2 \le x \le T+2$ (on pouvait aussi remarquer que $f(x)$ est une fonction paire donc $f(x-2) = f(2-x)$). Enfin, pour $f\left(\frac{x-1}{2}\right)$, on a $-T \le \frac{x-1}{2} \le T$ donc $-2T+1 \le x \le 2T+1$.



■

— Justifier soigneusement (mais sans l'étude d'un tableau de signe) de la positivité des fonctions suivantes : $f_1(y) = \begin{cases} ye^{-\frac{y^2}{2}} \; si \; y \ge 0 \\ 0 \; sinon \end{cases}$, $f_2(x) = cos(x)+1$, $f_3(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f_4(x) = \begin{cases} x^{\alpha}(1-x)^{\beta} \; si \; 0 \le x \le 1 \\ 0 \; sinon \end{cases}$, et $f_5(z) = e^{-arctan(-z^3)}$.

On a $f_1(x) \ge 0$ puisque qu'il s'agit du produit de $y \ge 0$ par une exponentielle qui est toujours positive par définition. Pour $f_2(x)$, sachant que $-1 \le cos(x) \le 1$ on a directement $0 \le f_2(x) \le 2$. On sait que $x^2 \ge 0$ donc $f_3(x)$ est un rapport de nombres positifs. Puisque $0 \le x \le 1$ on a $0 \le 1-x \le 1$ et $f_4(x)$ est le produit de deux nombres positifs (quel que soit le signe de α et β). Enfin une exponentielle est toujours positive (et définie sur tout $\mathbb{R}$), donc quel que soit son argument (ici $-arctan(-z^3)$) il s'agit toujours d'une fonction positive.■

— Donner, si elle existe, la parité des fonctions suivantes : $f_1(x) = sin^2(x) - 2cos(x) - 1$, $f_2(z) = cos(z)\, sin\left(\frac{z}{2}\right)$, $f_3(y) = \frac{y-3}{y^2+1}$, $f_4(x) = \frac{1}{x^3}$ et $f_5(x) = xe^{-\omega x^2}$.

Dans tout les cas, on calcul $f_i(-x)$ et on regarde ce que l'on obtient. Nous avons

$$f_1(-x) = sin^2(-x) - 2cos(-x) - 1 = (-sin(x))^2 - 2cos(x) - 1 = f_1(x)$$

donc la fonction $f_1(x)$ est une fonction paire.

$$f_2(-z) = cos(-z)\, sin\left(-\frac{z}{2}\right) = -cos(z)\, sin\left(\frac{z}{2}\right) = -f_2(z)$$

donc la fonction $f_2(z)$est une fonction impaire.

$$f_3(-y) = \frac{-y-3}{(-y)^2+1}$$

donc la fonction $f_3(y)$ n'est ni paire ni impaire.

$$f_4(-x) = \frac{1}{(-1)^3 x^3} = -f_4(x)$$

donc la fonction $f_4(x)$ est une fonction impaire.

$$f_5(-x) = -xe^{-\omega(-x)^2} = f_5(x)$$

donc la fonction $f_5(x)$ est une fonction paire.■

— Donner la parité d'un produit et d'une somme de deux fonctions paires, de deux fonctions impaires et d'une fonction paire et une fonction impaire.

On pose $s(x) = f_1(x) + f_2(x)$ et $p(x) = f_1(x) f_2(x)$. L'exercice est plus abstrait mais il s'agit toujours de regarder le comportement de $s(-x)$ et $p(-x)$. Il est important d'avoir en tête ce type de résultats pour calculer plus rapidement certaines intégrales intervenant dans les différentes transformations (Fourier, Laplace) ainsi que pour le calcul de certaines espérances mathématiques qui seront vu au cours de l'année du L3.

Si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont des fonctions paires alors $s(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = s(x)$ et la somme de deux fonctions paires et une fonction paire. Nous avons également $p(-x) = f_1(-x) f_2(-x) = f_1(x) f_2(x) = p(x)$ et le produit de deux fonctions paires et une fonction paire.

Si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont des fonctions impaires alors $s(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = -f_1(x) - f_2(x) = -s(x)$ et la somme de deux fonctions impaires et une fonction impaire. Nous avons également $p(-x) = f_1(-x) f_2(-x) = f_1(x) f_2(x) = p(x)$ et le produit de deux fonctions impaires et une fonction paire.

Si $f_1(x)$ est une fonction paire et $f_2(x)$ une fonction impaire alors $s(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) - f_2(x)$ et la somme n'est ni paire ni impaire. Nous avons également $p(-x) = f_1(-x) f_2(-x) = -f_1(x) f_2(x) = -p(x)$ et le produit est une fonction impaire.■

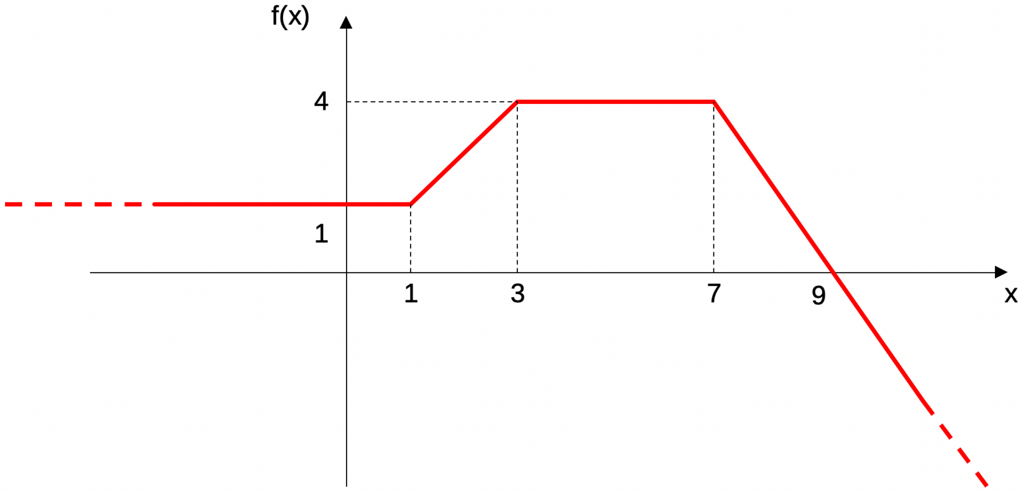
— Montrer que les fonctions suivantes sont périodiques et indiquer leurs périodes : $f_1(x) = cos(x)$, $f_2(x) = cos(\omega x)$, $f_3(x) = Acos(\omega x + \phi)$, $f_4(x) = cos(2\pi f x) + 1$, $f_5(x) = sin(2x) - 2cos\left(\frac{x}{2}\right)$, $f_6(x) = cos(x)\, sin(x)$, $f_7(x) = cos^2(x) - cos(x) - 1$ et $f_8(t) = \sum_{n=1}^{12} cos(n\omega t)$.

On rappel[2] qu'il faut déterminer les plus petit $T_{i=1,\ldots,8}$ positifs tels que $f_i(x) = f_i(x + T_i)$ pour tout x dans le domaine de définition de f. Evidement, l'étude détaillée vue au lycée de la fonction élémentaire cosinus montre que $T_1 = 2\pi$ (on a la même chose pour la fonction $sin(x)$). Concernant $f_2(x)$, on cherche donc la valeur de T_2 telle que $cos(\omega x) = cos(\omega(x + T_2)) = cos(\omega x + \omega T_2)$ ce qui entraine $\omega T_2 = T_1 = 2\pi$. Donc $T_2 = \frac{2\pi}{\omega}$. Concernant $f_3(x)$, on cherche donc la valeur de T_3 telle que $Acos(\omega x + \phi) = Acos(\omega(x + T_3) + \phi) = Acos(\omega x + \phi + \omega T_3)$ ce qui entraine également $\omega T_3 = T_1 = 2\pi$ et donc $T_3 = \frac{2\pi}{\omega}$. L'amplitude A et la phase ϕ n'entrainent donc pas de modification de la période d'un signal « sinusoïdale » et seule la pulsation ω compte. Concernant $f_4(x)$, on cherche donc la valeur de T_4 telle que $cos(2\pi f x) + 1 = cos(2\pi f(x + T_4)) + 1$. On a donc directement $T_4 = \frac{1}{f}$ en posant $\omega = 2\pi f$ dans $f_2(x)$. Concernant $f_5(x)$), on a que $sin(2x)$ est de période π et que $-2cos\left(\frac{x}{2}\right)$ est de période 4π. Donc $T_5 = 4\pi$ d'après la note de bas de page (ii). Concernant $f_6(x)$, on peut trouver facilement qu'une période est 2π mais il existe une plus petite période qui est $T_6 = \pi$ puisque $f_6(x + \pi) = cos(x + \pi)\, sin(x + \pi) = -cos(x) \times (-sin(x))$. Concernant $f_7(x)$, la constante "-1" ne joue aucun rôle dans l'étude

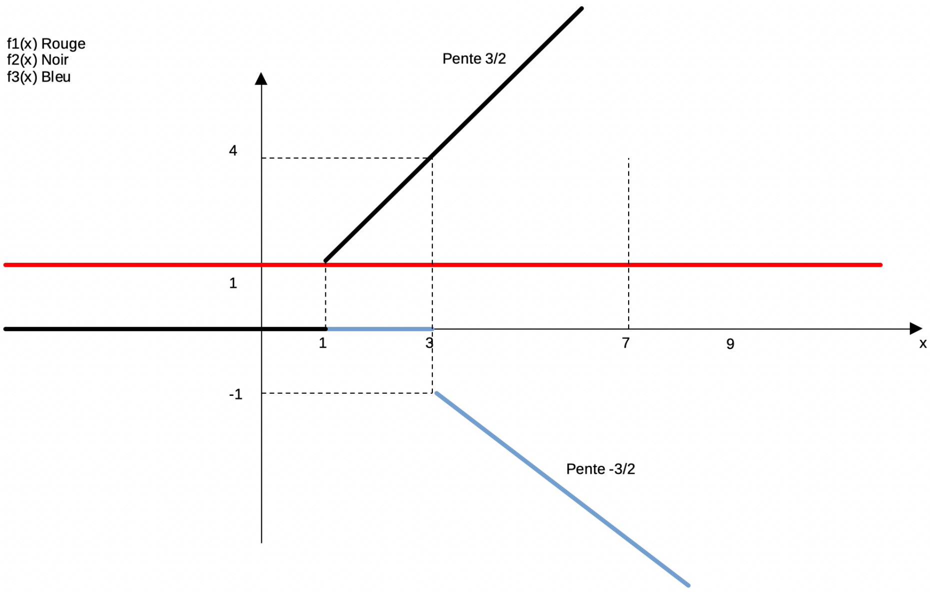
2. Rappelons que, contrairement à l'étude de la parité de fonctions, la période du produit, de la somme, de l'inverse et du quotient (lorsqu'ils sont définis) de deux (ou plusieurs) fonctions périodiques n'est pas nécessairement une fonction périodique. Nous savons néanmoins que (i) La somme, le produit, l'inverse et le quotient (lorsqu'ils sont définis) de deux fonctions périodiques de **même période** T sont également périodiques de période T. (ii) Soient f_1 une fonction périodique de période T_1 et f_2 une fonction périodique de période T_2. On suppose qu'il existe deux entiers $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $n_1 T_1 = n_2 T_2$. Alors la somme, le produit, l'inverse et le quotient (lorsqu'ils sont définis) sont périodiques de période $n_1 T_1 = n_2 T_2$ mais cette période n'est pas nécessairement la plus petite. (iii) Soit f fonction périodique de période T et $a \in \mathbb{R}^*$, alors la fonction $g(x) = f(ax)$ est périodique de période $\frac{T}{a}$.

de la périodicité, $cos^2(x)$ est périodique de période π et $cos(x)$ est périodique de période 2π donc $T_7 = 2\pi$ d'après la note de bas de page (ii). Enfin, concernant $f_8(x)$, on a $cos(n\omega x)$ qui est périodique de période $\frac{2\pi}{n\omega}$ $\forall n = 1 \ldots 12$, donc $T_8 = \frac{2\pi}{\omega}$.$\blacksquare$

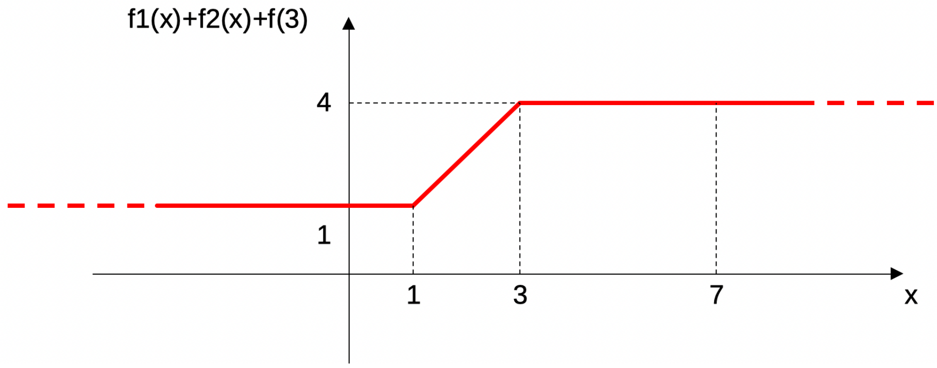
— Soient les fonctions $f_1(x) = 1\ \forall x$, $f_2(x) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\ si\ x \geq 1 \\ 0\ sinon \end{array} \right.$, $f_3(x) = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}\ si\ x \geq 3 \\ 0\ sinon \end{array} \right.$ et $f_4(x) = \left\{ \begin{array}{c} \alpha x + \beta\ si\ x \geq 7 \\ 0\ sinon \end{array} \right.$. Donner les valeurs de α et β pour que la fonction $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x)$ soit de la forme suivante :



On constate que les fonctions sont définies aux mêmes points d'abscisses apparaissant dans la fonction « cible » $f(x)$ (heureusement), donc on peut raisonner graphiquement. Nous n'avons affaire qu'à des segments de droite donc une analyse simple permet de tracer les trois première fonctions



et donc la fonction $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ est la suivante



Donc on cherche la fonction $f_4(x)$ telle que

$$f(7) = 4 = f_1(7) + f_2(7) + f_3(7) + f_4(7) = 1 + 10 - 7 + 7\alpha + \beta$$

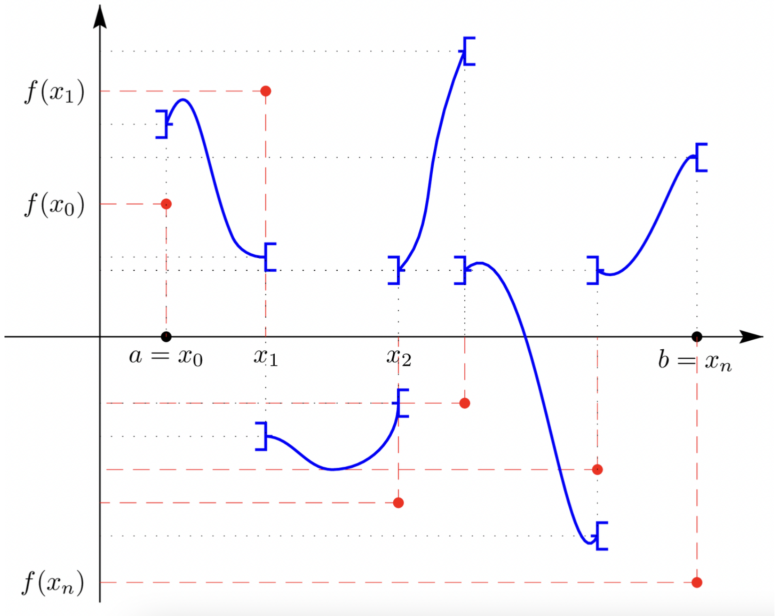
d'où l'on tire $7\alpha + \beta = 0$. De plus, la pente de $f_4(x)$ doit être $\alpha = -2$ par identification avec $f(x)$. On en conclu que $\beta = 14$.■

1.6 Continuité, continuité par morceaux, dérivabilité, etc

— Dessiner ou donner plusieurs exemples de fonctions $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^0$ par morceaux, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, $\mathcal{C}^0$ mais non $\mathcal{C}^1$.

Certaines fonctions, $\forall x \in \mathbb{R}$, comme e^x, $cos(x)$, x^2 (ou n'importe quel polynômes) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donc $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ (n'importe quelle combinaison linéaire entre toutes ces fonctions est également $\mathcal{C}^\infty$). Il en est de même pour $ln(x)$ mais seulement sur son domaine de définition $\mathbb{R}^{+*}$. La fonction $\frac{1}{x}$ n'est pas $\mathcal{C}^0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. La fonction $|x|$ est $\mathcal{C}^0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ mais pas $\mathcal{C}^1$ car non dérivable en 0. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $|x|^{k+1}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ mais pas plus. La fonction $f(x) = \left\{ \begin{array}{c} x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right)\ si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{array} \right.$ est $\mathcal{C}^0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ mais pas $\mathcal{C}^1$ bien qu'elle soit dérivable (la dérivée n'est pas continue car il n'existe pas de limite à droite et à gauche en 0). Concernant la continuité par morceaux, pour une fonction $f(x)$ définie sur un segment $[a, b]$, il faut que $f(x)$ admettent un <u>nombre fini</u> de points de discontinuités[3] et qu'elle admette <u>une limite finie</u> à gauche et à droite en chaque points de discontinuités (ces deux limites non pas besoin d'être égales). Aux points de discontinuités, la valeur de la fonction doit également être finie (une fonction continue par morceaux <u>sur un segment</u> est bornée) mais, encore une fois, peut être différente des limites à gauche et à droite. Si maintenant $f(x)$ est définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ qui n'est plus nécessairement un segment, alors on dit que $f(x)$ est continue par morceaux sur cet intervalle si elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans cette intervalle. Enfin, il n'est pas nécessaire que la fonction soit bornée sur les bords de l'intervalle (en particuliers en $\pm\infty$ si on considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$) et, toujours dans le cas de fonctions définies sur il peut donc cette fois-ci y avoir un nombre infini de points de discontinuités. Par exemple, toutes les fonctions "en escalier" (avec une valeur finie en chaque points de discontinuités) sont continues par morceaux. La fonction ci-après est continue par morceaux.

3. La fonction est donc $\mathcal{C}^0$ en dehors de ce nombre fini de points de discontinuités.



Mais la fonction définie par $f(x) = 1/x$ pour $x \neq 0$ et $f(x) = 3$ pour $x = 0$ n'est pas continue par morceaux car les limites à gauche et à droite du point de discontinuité $x = 0$ sont infinies. Concernant les fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux, il faut que la fonction soit $\mathcal{C}^0$ par morceaux, puis qu'en dehors des points de discontinuités elle soit $\mathcal{C}^1$, quelle soit dérivable à gauche et à droite de chaque points de discontinuité et enfin que cette dérivée admettent dune limite finie à gauche et à droite. La fonction "dent de scie" $2\pi-$périodique définie par $f(x) = x$ si $-\pi \leq x < \pi$ et la fonction "créneaux" $2\pi-$périodique définie par $f(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x \in [0, \pi[\\ -1 \; si \; x \in [-\pi, 0[\end{cases}$ sont $\mathcal{C}^1$ (et donc $\mathcal{C}^0$) par morceaux (mais elle ne sont pas $\mathcal{C}^1$ ou même $\mathcal{C}^0$). La fonction "triangle" $T-$périodique $(T > 0)$ définie par $f(x) = |x|$ si $-\frac{T}{2} \leq x < \frac{T}{2}$ est continue $(\mathcal{C}^0)$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Enfin la fonction tangente (qui est périodique de période π n'est pas $\mathcal{C}^1$ par morceaux. ■

— Soit $f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} \; si \; x \geq 0 \\ 0 \; sinon \end{cases}$, montrer que $f(x)$ est dérivable en zéro calculer sa dérivée.

Ce genre d'étude est utile pour l'étude des circuits électriques (et des systèmes en général) pour connaître le comportement du circuit lors du démarrage de celui-ci, par exemple, en automatique on peut savoir si l'on a affaire à un circuit du 1er ordre ou du 2eme ordre avec cette simple analyse. Ici, la fonction est dérivable partout sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ car les fonctions constantes et exponentielle le sont. Pour montrer que la fonction est également dérivable en zéro il faut étudier $\underset{x \to 0^-}{lim} f(x)$ et $\underset{x \to 0^+}{lim} f(x)$. Ici nous avons $\underset{x \to 0^-}{lim} f(x) = \underset{x \to 0^-}{lim} 0 = 0$ et $\underset{x \to 0^+}{lim} f(x) = \underset{x \to 0^+}{lim} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} = \underset{x \to 0^+}{lim} 1 - e^0 = 0$. Donc

$$f'(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} \; si \; x \geq 0 \\ 0 \; sinon \end{cases}$$

■

— Donner l'argument du maximum des fonctions suivantes : $f_1(x) = -x^2 + 1$, $f_2(x) = -(x+1)^2$, et $f_3(x) = arctg(\frac{x}{\alpha}) - arctg(\frac{x}{\beta})$.

On peut montrer facilement que les trois fonctions n'admettent qu'un seul maximum, donc en dérivant en zéro, on obtient $arg\,\underset{x}{max} f_1(x) = 0$, $arg\,\underset{x}{max} f_2(x) = -1$et $arg\,\underset{x}{max} f_2(x) = arctg\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - arctg\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.■

— Soit $f(x) = \left\{ \begin{array}{c} xe^{-\omega x}\,si\; x \geq 0 \\ 0\,sinon \end{array} \right.$, montrer que $f(x)$ n'est pas dérivable en zéro, donner sa dérivée sur $]0, +\infty[$, son maximum et l'argument de son maximum.

On a $\underset{x\to 0^-}{lim} f'(x) = 0$ et $\underset{x\to 0^+}{lim} f'(x) = \underset{x\to 0^+}{lim} (1-\omega x)\, e^{-\omega x} = 1$. Puisque les deux limites sont différentes il vient que $f(x)$ n'est pas dérivable en zéro. Sur $]0, +\infty[$, $f'(x) = (1-\omega x)\, e^{-\omega x}$ et $\underset{x}{max} f(x) = f'(x)|_{x=0} = \frac{1}{\omega}$ et $arg\,\underset{x}{max} f(x) = \frac{1}{\omega e}$.■

— Soit $f(x) = e^{-|x|}$, montrer que $f(x)$ n'est pas dérivable en zéro et donner son maximum et l'argument de son maximum.

La fonction $f(x)$ n'est pas dérivable en zéro car $|x|$ n'est pas dérivable en zéro. En effet, $\underset{x\to 0^-}{lim} |x| = \underset{x\to 0^-}{lim} -x = -1 \neq \underset{x\to 0^+}{lim} |x| = \underset{x\to 0^+}{lim} x = 1$. Puisque $f(x)$ est une fonction strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ le maximum est en $x = 0$ et l'argument du maximum est $f(0) = 1$.■

1.7 Intégration

On supposera toute les intégrales de cet exercice convergentes (une mise au point sur la convergence des intégrales sera vu lors de l'UE 301 Analyse Fonctionnelle). En l'absence d'indication, choisissez la meilleur méthode pour calculer les intégrales demandées (primitive, intégration par partie ou changement de variable).

Remarque : bien sûre, le calcul intégrale utile pour l'E3A ne se résume pas à ces seules exercices. On a compiler ici seulement quelques calculs simples (mais utiles !) qui « piègent » malheureusement souvent une partie des étudiants.

— Calculer $\int_0^1 x(1-x)^\beta\, dx$ pour $\beta > 0$

Il y a plusieurs méthodes pour obtenir la primitive (IPP, changement de variable, etc.) On obtient $\int x(1-x)^\beta\, dx = \frac{-(1-x)^{\beta+1}((\beta+1)x+1)}{(\beta+1)(\beta+2)} + constante$. Ce qui donne pour l'intégrale $\frac{1}{(\beta+1)(\beta+2)}$.■

— Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

Puisque $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ et $\frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-\frac{3}{2}}$, on obtient directement $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = 2$.■

— Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-y\left(x^2+1\right)} dy$

La primitive est directe car, ici, la variable d'intégration est y et non x. Donc $\int_0^{+\infty} e^{-y\left(x^2+1\right)} dx = \left[-\frac{e^{-y\left(x^2+1\right)}}{x^2+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2+1}$.■

— Soit la fonction $f(x) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}\,si\; 0 \leq x \leq 2 \\ 0\,sinon \end{array} \right.$, calculer les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} f(x)\, dx$ $(i^2 = -1)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^2 xdx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} e^{iux} dx = \frac{e^{2iu}-1}{iu} = \cdots$$

■

— Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} e^{-x}\ si\ x \geq 0 \\ 0\ sinon \end{cases}$, calculer les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx = 1$$

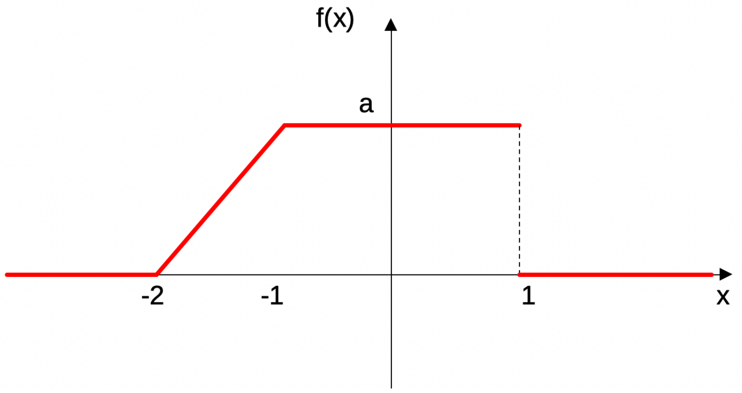
en utilisant une IPP.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x}dx = 2$$

en utilisant une double IPP.■

— Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} \alpha x + 2\alpha\ si\ -2 \leq x \leq -1 \\ \alpha\ si\ -1 \leq x \leq 1 \\ 0\ sinon \end{cases}$. Dessiner la fonction, donner la valeur de α pour avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ et calculer $\int_{-1,5}^{0} f(x)\,dx$

La fonction est définie par morceaux, elle est constante (non nulle) sur $[-1,1]$, définie par l'équation d'une droite sur $[-2,1]$ et nulle partout ailleurs. Pour tracer la droite il suffit de connaître deux points particuliers. Ici on a directement $f(-2) = 0$ et $f(-1) = \alpha$. Donc le tracé est le suivant :



On cherche ensuite la valeur de α telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. On peut raisonner graphiquement avec l'aire sous la courbe directement (on peut aussi passer par le calcul intégrale direct mais c'est plus long). On obtient que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} + 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{5}$$

■

— Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}\ si\ x \geq 0 \\ 0\ sinon \end{cases}$, calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ (justifier pourquoi une IPP ne marche pas ici)

Une IPP ne marche pas car il nous faudrait la primitive de la fonction $e^{-\frac{x^2}{2}}$ qui n'existe pas (mais cette fonction interviendra souvent en L3 et M1 E3A). Ici la primitive est directe en remarquant que $\left(e^{\alpha x^2}\right)' = 2\alpha x e^{\alpha x^2}$. On obtient donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = 1$$

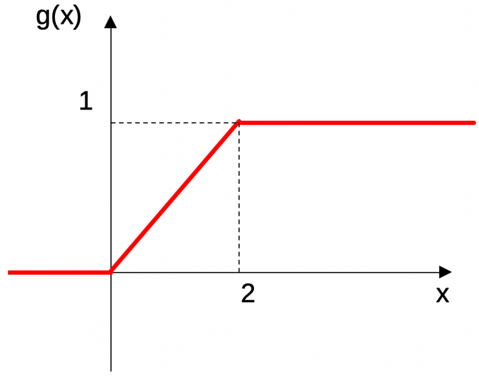
■

— Soit la fonction $f(x,y) = \begin{cases} \alpha\ si\ -1 \leq x \leq 1\ et\ -1 \leq y \leq 2 \\ 0\ sinon \end{cases}$, calculer les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

Il s'agit d'une fonction de deux variables « simple » puisque elle est égale à une constante (non nulle) ou zéro. On peut donc la représenter graphiquement comme un parallélépipède rectangle de hauteur α de longueur 2 et de largeur 3. Donc l'intégrale double représente le volume V de ce parallélépipède rectangle et on a $V = 2 \times 3 \times \alpha = 6\alpha$. L'intégrale simple représente l'aire sous la surface $f(x,y)$ le long de l'axe y, on a donc sans calcul $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} 3\alpha\ si\ -1 \leq x \leq 1 \\ 0\ sinon \end{cases}$. ■

— Soit $f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ si\ 0 \leq u \leq 2 \\ 0\ sinon \end{cases}$, étudier et tracer en fonction de x la fonction $g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$.

La fonction f est un rectangle de hauteur $\frac{1}{2}$ entre 0 et 2. Il faut ici réfléchir à comment varie la variable x (qui appartient aux réels). Si $x \leq 0$, on a $\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} 0du = 0$. Si cette fois $x \geq 2$, on a $\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{0}^{2} \frac{1}{2}du = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ et enfin, si $0 \leq x \leq 2$, on obtient $\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{0}^{x} \frac{1}{2}du = \frac{x}{2}$ ce qui correspond à une droite. Donc le tracé de la fonction $g(x)$ est



■

1.8 Séries de Fourier

— Déterminer le série de Fourier (termes en sinus et cosinus) de la fonction $2\pi-$périodique définie par $f(x) = x$ si $-\pi \leq x < \pi$.

Cette fonction est impaire, les coefficients en cosinus a_n sont nuls et la valeur moyenne est nulle ($a_0 = 0$). On a par définition : $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x sin(nx)\,dx = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$ en utilisant une intégration par partie. ■

— Déterminer le série de Fourier (termes en sinus et cosinus) de la fonction $2\pi-$périodique définie par $f(x) = \begin{cases} 1\ si\ x \in [0,\pi[\\ -1\ si\ x \in [-\pi,0[\end{cases}$.

Cette fonction est impaire, les coefficients en cosinus a_n sont nuls et la valeur moyenne est nulle ($a_0 = 0$). On a par définition : $b_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} sin(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} sin(nx)\,dx = \frac{2}{n\pi}(1 - cos(n\pi))$. Puisque $cos(n\pi) = \begin{cases} 1\ si\ n\ paire \\ -1\ si\ n\ impaire \end{cases}$, on a $b_n = \begin{cases} 0\ si\ n\ paire \\ \frac{4}{n\pi}\ si\ n\ impaire \end{cases}$. ■

— Déterminer le série de Fourier (termes en sinus et cosinus) de la fonction $T-$périodique ($T > 0$) définie par $f(x) = |x|$ si $-\frac{T}{2} \leq x < \frac{T}{2}$. En posant $T = 2\pi$, et en utilisant la condition de Dirichlet ou le théorème de Parceval, en déduire la valeurs des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Cette fonction est paire, les coefficients en sinus b_n sont nuls. On a par définition : $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x| \, dx = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x dx = \frac{T}{4}$ et $a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx$. A l'aide d'une intégration par partie, on obtient $a_n = \frac{T}{(n\pi)^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 \; si \; n \; paire \\ -\frac{2T}{(n\pi)^2} \; si \; n \; impaire \end{cases}$. Si $T = 2\pi$, la série de Fourier s'écrit donc $\tilde{f}(v) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$. La fonction f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Elle vérifie donc les hypothèses du théorème de Dirichlet, et en particulier, pour $x = 0$, il vient $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Enfin, écrivons l'égalité de Parseval : $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$. En isolant la somme, on trouve donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.■

— Déterminer le série de Fourier (termes en sinus et cosinus) de la fonction $2\pi-$périodique définie par $f(x) = x^2$ si $-\pi \leq x \leq \pi$. En utilisant la condition de Dirichlet ou le théorème de Parceval, en déduire la valeurs des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Cette fonction est paire, les coefficients en sinus b_n sont nuls. On a par définition : $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$ et $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 cos(nx) \, dx$. A l'aide d'une double intégration par partie, on obtient $a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}$. La fonction f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a donc $\forall x \in [-\pi, \pi] : x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{cos(nx)}{n^2}$. Si l'on fait $x = \pi$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Si l'on fait $x = 0$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Pour calculer la dernière somme demandée, il faut pouvoir mettre les coefficients au carré, et c'est ce que l'on obtient dans l'égalité de Parseval, que l'on peut appliquer ici puisque f est continue. On obtient $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4}$ et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.■

— Déterminer le série de Fourier (termes en exponentielle complexe) de la fonction $2\pi-$périodique définie par $f(x) = e^x$ si $-\pi \leq x \leq \pi$.

La fonction n'est ni paire ni impaire. Soit i le nombre imaginaire pur tel que $i^2 = -1$. Les coefficients complexes s'écrivent $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx \; \forall n \in \mathbb{Z}$. On obtient facilement $c_n = \frac{sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)} (-1)^n (1 + ni)$.■

— Mettre sous la forme $s(t) = Acos(\omega t - \varphi)$ les fonctions $s_1(t) = cos(5t) + sin(5t)$, $s_2(t) = cos(25t) + \sqrt{2} sin(25t)$ et $s_3(t) = -sin(3t)$.

$$s_1(t) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} cos(5t) + \frac{\sqrt{2}}{2} sin(5t) \right) = \sqrt{2} cos\left(5t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$s_2(t) = \sqrt{3} cos(25t - \phi) \; avec \; cos(\phi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$s_3(t) = cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$$

■

— Représenter les spectres d'amplitude et de phase de la fonction suivante $s(t) = cos(\omega t) + 5cos(2\omega t) + 5sin(2\omega t) + sin(3\omega t) - cos(3\omega t) - \sqrt{2} cos(4\omega t)$.

Par identification, on a directement $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a_2 = 5$, $b_2 = 5$, $a_3 = -1$, $b_3 = 1$, $a_4 = -\sqrt{2}$, $b_4 = 0$, et $\forall n \geq 5 \; a_n = 0$ et $b_n = 0$. Donc, $A_1 = 1$, $\phi_1 = 0$, $A_2 = 5\sqrt{2}$, $\phi_2 = \frac{\pi}{4}$, $A_3 = \sqrt{2}$, $\phi_3 = \frac{3\pi}{4}$, $A_4 = \sqrt{2}$, $\phi_4 = \pi$, et $\forall n \geq 5 \; A_n = 0$, $\phi_n = 0$.■

Chapitre 2

Algèbre

2.1 Ensembles

— Soient les ensembles $A = \{1, 5, -12, \pi, log(3)\}$, $B = \{0, -1, -12, 1\}$, $C = \{-7, cos(2), 24, \pi\}$ et $D = \mathbb{N}$. Donner $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cup C$, $A \cap (B \cup C)$, $B \cap D$ et $B \cup D$.

On a facilement

$$A \cap B = \{-12, 1\}$$

$$A \cup B = \{1, 5, -12, \pi, log(3), 0, -1\}$$

$$A \cap B \cap C = \{-12, 1\} \cap \{-7, cos(2), 24, \pi\} = \emptyset$$

$$A \cup B \cup C = \{1, 5, -12, \pi, log(3), 0, -1, -7, cos(2), 24, \pi\}$$

$$A \cap B \cup C = (A \cap B) \cup C = \{-12, 1, -7, cos(2), 24, \pi\}$$

$$A \cap (B \cup C) = A \cap \{0, -1, -12, 1, -7, cos(2), 24, \pi\} = \{1, -12, \pi\}$$

$$B \cap D = \{0, 1\}$$

$$B \cup D = \{-1, -12\} \cup \mathbb{N}$$

■

— Soient les ensembles $A = \{0, 1, 5, 10\}$ et $B = \{i \, tq \, 0 \leq i \leq 10\}$. Donner le complémentaire de A dans B.

On peut réécrire $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Donc on cherche tout les éléments de B qui ne sont pas présent dans A. Le complémentaire de A est noté^{C}A, A^{C} $\bar{A}$. En cas de risque de confusion, si l'on veut préciser que l'on parle du complémentaire de A dans B, on note $\complement_B A$. On obtient immédiatement $\complement_B A = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$.■

— Donner des exemples d'ensembles fini, dénombrable et infini (non-dénombrable).

Attention à la différence de notation entre $\{\}$, $[]$, $[[$, $()$ etc.

Exemples d'ensembles fini :

$$\{14\}$$

$$\{-1, 2, 30\}$$

$$\left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \, tq \, 1 \leq i \leq 6; 0 \leq j \leq 6\right\}$$

Exemples d'ensembles dénombrables : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres paires/impaires, l'ensemble $\left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2\right\}$

Exemples d'ensembles infini : $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $[0, 1]$, $[0, 1[$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}$, l'ensemble $[a, b]$ $\forall \, (a, b) \in \mathbb{R}^2$.■

— Soit l'ensemble $\Omega = \{(i,j,k) \in \mathbb{N}^3 \; tq \; 1 \leq i \leq 6; 0 \leq j \leq 6; 2 \leq k \leq 10\}$. Donner le cardinal de Ω.

$Card\,(\Omega) = 6 \times 6 \times 12 = 432.$■

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soient les ensembles $E_n = \left\{\frac{1}{i} \; tq \; 1 \leq i \leq n\right\}$ avec $i \in \mathbb{N}$. Donner $\cup_{n=1}^{N} E_n$ et$\cap_{n=1}^{N} E_n$.

On a

$$\cup_{n=1}^{N} E_n = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cdots \cup E_N = \{1\} \cup \left\{\frac{1}{2}, 1\right\} \cup \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\} \cdots \cup \left\{\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$$
$$= \left\{\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\} = E_N$$

et

$$\cap_{n=1}^{N} E_n = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cdots \cap E_N = \{1\} \cap \left\{\frac{1}{2}, 1\right\} \cap \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\} \cdots \cap \left\{\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$$
$$= \{1\} = E_1$$

■

— Soit un ensemble fini $E \subset \mathbb{N}$. On note μ l'application telle que $\forall E$, $\mu(E) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n(E)$ avec $\delta_n(E) = \begin{cases} 1 \; si \; n \in E \\ 0 \; si \; n \notin E \end{cases}$. Calculer $\mu(\{1,2,3,4\})$ puis $\mu(\{2,5,90\})$. A quoi correspond l'application μ en pratique ?

On écrit directement

$$\mu(\{1,2,3,4\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n(\{1,2,3,4\})$$
$$= \delta_0(\{1,2,3,4\}) + \delta_1(\{1,2,3,4\}) + \delta_2(\{1,2,3,4\}) + \delta_3(\{1,2,3,4\}) + \delta_4(\{1,2,3,4\}) + \delta_5(\{1,2,3,4\}) + \cdots$$
$$= 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + \cdots = 4$$

De même pour $\mu(\{2,5,90\})$ les seuls éléments non nuls (et égaux à 1) dans la somme sont $\delta_2(\{2,5,90\})$, $\delta_5(\{2,5,90\})$ et $\delta_{90}(\{2,5,90\})$, donc $\mu(\{2,5,90\}) = 3$. L'application $\mu(E)$ correspond donc au cardinal de l'ensemble E.■

2.2 Manipulation de vecteurs et matrices

— Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Est-il possible d'effectuer les calculs suivant ? xx, xx^T, x^Tx, Ax^T, x^TA, xA, x^TAx, xx^TA, AA^T, AA, xAA^T, et x^TA^TAx. Si oui, donner le résultat ainsi que la Trace lorsque cela est possible.

Redonner la définition d'un produit de matrices quelconque (avec les bonnes dimensions pour avoir un résultat consistent)

$$xx = impossible$$
$$xx^T = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}, \; trace\left(xx^T\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$
$$x^Tx = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \; trace\left(x^Tx\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$Ax^T = impossible$$

$$xA = impossible$$

$$x^T Ax = x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 = trace\left(x^T Ax\right)$$

$$xx^T A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\left(x_1+x_2\right) & x_1\left(2x_1-x_2\right) & 4x_1x_3 \\ x_2\left(x_1+2x_2\right) & x_2\left(2x_1-x_2\right) & 4x_2x_3 \\ x_3\left(x_1+2x_2\right) & x_3\left(2x_1-x_2\right) & 4x_3^2 \end{pmatrix},$$

avec

$$trace\left(xx^T A\right) = x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 3x_1x_2$$

$$AA^T = AA = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} car\ A = A^T,\ trace\left(AA\right) = 26$$

$$xAA^T = impossible$$

$$x^T A^T Ax = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 16x_3^2 = trace(x^T A^T Ax)$$

■

— Dans $\mathbb{R}^{3\times3}$, donner un exemple de matrice non diagonale : a. de déterminant nul, b. symétrique, c. inversible, d. non inversible, e. de rang 3, f. de rang 1.

Il s'agit d'exemples de solutions parmi tant d'autre mais le but est ici de laisser l'étudiant proposer par lui-même en exécutant un exercice inverse à ce qu'il a l'habitude de faire (et aussi de réviser les différentes notions + la règle de Sarrus + éventuellement le pivot de Gauss)

a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,b $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, c $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, d $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, e $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$, f $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.■

2.3 Déterminants et inversion de matrices

Calculer les déterminants des matrices suivantes : $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ puis donner leurs matrices inverses si elles existent (on utilisera de préférence la méthode de la comatrice).

$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -14$, $\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -20$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -15$.■

2.4 Matrice définies positives

— Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est définie positive.

Soit $x \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ un vecteur non nul, alors $x^TMx = x_1^2 + x_3^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2$ est une quantité toujours positive puisque c'est une somme de 4 termes positifs. On peut aussi calculer les valeurs propres de la matrice M est montrer qu'elles sont toutes positives (ici on trouve $\{2-\sqrt{2}, 2, 2+\sqrt{2}\}$).■

— Donner les conditions pour qu'une matrice diagonale soit définie positives.

Tout les éléments de la diagonale doivent être positifs.■

2.5 Produit scalaire

— Soient $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, écrire $\langle u, x\rangle$

Il faut bien avoir en tête les différentes notations totalement équivalente du produit scalaire (c'est-à-dire la notation matricielle ou la notation termes à termes avec une somme). En effet, on peut écrire selon le problème pour des vecteurs de taille n, $\langle u, x\rangle = u^Tx = x^Tu$ ou encore $\langle u, x\rangle = \sum_{i=1}^n u_ix_i$. Ici, simplement, nous avons donc

$$\langle u, x\rangle = 2x_1 - x_2 + 2x_2$$

■

— Soient $u \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$, démontrer que $\langle u, x+y\rangle = \langle u, x\rangle + \langle u, y\rangle$

Selon notre préférence de notation du produit scalaire, nous obtenons :

Avec la notation matricielle

$$\langle u, x+y\rangle = u^T(x+y) = u^Tx + u^Ty = \langle u, x\rangle + \langle u, y\rangle$$

Et avec la notation sous forme de somme

$$\langle u, x+y\rangle = \sum_{i=1}^n u_i(x_i+y_i) = \sum_{i=1}^n u_ix_i + u_iy_i = \sum_{i=1}^n u_ix_i + \sum_{i=1}^n u_iy_i = \langle u, x\rangle + \langle u, y\rangle$$

■

— Soient $u \in \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, démontrer que $\langle u, Ax+a\rangle = \left\langle A^Tu, x\right\rangle + \langle u, a\rangle$

Avec la notation matricielle

$$\langle u, Ax+a\rangle = u^T(Ax+a) = u^TAx + u^Ta = \left(A^Tu\right)^T x + u^Ta$$

■

2.6 Décomposition en éléments simples

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $\frac{1}{x^3-x}$
2. $\frac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2}$
3. $\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
4. $\frac{2x^2+1}{(x^2-1)^2}$
5. $\frac{x^3+1}{(x-1)^3}$
6. $\frac{x^4+1}{(x+1)^2(x^2+1)}$
7. $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$

Pour la dernière décomposition, en déduire la limite lorsque $n \to +\infty$ de la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

$$\frac{1}{x^3-x}=\frac{1}{x\left(x^2-1\right)}=\frac{1}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2\left(x+1\right)}+\frac{1}{2\left(x-1\right)}$$

$$\frac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2}=\frac{x^2+2x+5}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}=1-\frac{8}{x-1}+\frac{13}{x-2}$$

$$\frac{x^3}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)}=1+\frac{1}{2\left(x-1\right)}-\frac{8}{\left(x-2\right)}+\frac{27}{2\left(x-3\right)}$$

$$\frac{2x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x^2+1}{\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{\left(x-1\right)^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{\left(x+1\right)^2}\right)$$

$$\frac{x^3+1}{\left(x-3\right)^3}=1+\frac{3}{x-3}+\frac{3}{\left(x-3\right)^2}+\frac{2}{\left(x-3\right)^3}$$

$$\frac{x^4+1}{\left(x+1\right)^2\left(x^2+1\right)}=1-\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{\left(x+1\right)^2}$$

$$\frac{1}{x\left(x+1\right)\left(x+2\right)}=\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\left(x+2\right)}$$

et

$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

■

Chapitre 3

Divers

3.1 Identification

Les problèmes d'identifications de fonctions, intégrales, etc. sont très souvent utilisés en génie électrique car vous serez amener à étudier certaines structures de fonctions en cours puis lors de la résolution de problèmes pratiques, les fonctions serons modifiées par la physique et il faudra s'adapter... De la même manière certain résultat de calculs intégrales sont connu pour un type de fonctions, et l'ingénieur doit savoir comment modifier légèrement le calcul pour ne pas avoir à refaire toute la démonstration.

— Sachant que $\frac{1}{y}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2y^2}}dx = 2\pi$ et sans effectuer de calcul intégrale, donner le résultat de l'intégrale$\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

On remarque que si on pose $y = 1$ et $\alpha = 0$ dans l'intégrale donnée alors $\frac{1}{y}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2y^2}}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2\pi$. Puisque la fonction est paire on obtient que $\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \pi$. On peut aussi demander la calcul de $\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4}}dx$ où il faut cette fois ci poser $y = \sqrt{2}$ et $\alpha = 0$ et l'on obtient $\sqrt{2}\pi$.■

— Identifier les fractions rationnelles $\frac{K}{1+Tx}$ et $\frac{10}{20x+100}$ pour donner les valeurs de K,et T.

La première contrainte est d'avoir 1 pour la constante du dénominateur. Donc en effectuant une factorisation, nous avons

$$\frac{10}{20x+100} = \frac{10}{100\left(\frac{20}{100}x+1\right)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{x}{5}+1}$$

Nous pouvons donc conclure que $K = \frac{1}{10}$ et $T = \frac{1}{5}$.■

— Identifier les fractions rationnelles $\frac{K}{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{2m}{\alpha}x+1}$ et $\frac{10}{x^2+10x+100}$ pour donner les valeurs de K,m, et α.

De la même manière on on obtient $K = \frac{1}{10}$, $m = \frac{1}{2}$, et $\alpha = 10$.■

— Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}e^{-2i\pi fx}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2 f^2}{a}}$, et sans effectuer de calcul intégrale, donner le résultat de l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}}e^{-2i\pi fx}dx$.

On remarque directement que $a = \frac{1}{4t}$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}}e^{-2i\pi fx}dx = \sqrt{4t\pi}e^{-4t\pi^2 f^2}$ et

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}}e^{-2i\pi fx}dx = e^{-4t\pi^2 f^2}$$

■

3.2 Nombres complexes : manipulation d'impédances et d'admittances

Vérifiez l'homogénéité des équations suivantes en supposant que R, R_2 sont des résistances, C une capacité et L une inductance. Par convention, Z est une impédance et Y une admittance. Pour celles qui sont homogènes, simplifiez-les sous la forme $\frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)}$ où P et Q sont des polynômes. j est le nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$.

1. $Z = \frac{R_2 R}{R+\frac{1}{jC\omega}}$
2. $Z = R_2 \frac{\frac{\frac{R}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}}}{R+\frac{1}{jC\omega}}$
3. $Z = \frac{jRL\omega}{R+\frac{1}{jC\omega}}$
4. $Z = \frac{jRL\omega}{jL\omega+R+\frac{1}{jC\omega+R}}$
5. $Z = \frac{\frac{1}{R+\frac{1}{jC\omega}}}{jL\omega+R+\frac{R_2 R}{R+\frac{1}{jC\omega}}}$
6. $Y = jC\omega + \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}$
7. $Y = j\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jL\omega}$

$Z = \frac{R_2 R}{R+\frac{1}{jC\omega}}$

Homogène (Ohms).

$$Z = \frac{jRR_2C\omega}{1 + jRC\omega}$$

$Z = R_2 \frac{\frac{\frac{R}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}}}{R+\frac{1}{jC\omega}}$

Homogène (Ohms).

$$Z = R_2 \frac{\frac{R}{jRC\omega+1}}{R + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$Z = R_2 \frac{\frac{jRC\omega}{jRC\omega+1}}{jRC\omega + 1}$$

$$Z = \frac{jRR_2C\omega}{(jRC\omega + 1)^2}$$

$$Z = \frac{jRR_2C\omega}{1 + 2j\omega RC - \omega^2 R^2 C^2}$$

$Z = \frac{jRL\omega}{R+\frac{1}{jC\omega}}$

Homogène (Ohms).

$$Z = \frac{-\omega^2 RLC}{1 + jRC\omega}$$

$Z = \frac{jRL\omega}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega + R}}$
Non homogène : $R + j\omega C$ n'a pas de sens.
$Z = \frac{\frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}}}{jL\omega + R + \frac{R_2 R}{R + \frac{1}{jC\omega}}}$
Non homogène : l'expression de droite donne des Ω^{-2}
$Y = jC\omega + \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}$
Homogène : Ω^{-1}

$$Y = \frac{-\omega^2 RLC + j\omega L + R}{jRL\omega}$$

$Y = j\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jL\omega}$
Homogène : Ω^{-1}

$$Y = \frac{-\omega^2 RR_2 LC + j\left(R_2 + R\right) L\omega + RR_2}{jRR_2 L\omega}$$

■.

Déterminez la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument des impédances, admittances et fonctions de transfert suivantes.

1. $H = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$
2. $Z = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$
3. $Y = jC\omega + \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}$
4. $H = \frac{\frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j\omega}{\omega_0 Q}}$
5. $H = \frac{\frac{R}{1 + jRC\omega}}{\frac{R}{1 + jRC\omega} + \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}}$

$H = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$

$$\mathrm{Re}(H) = Re\left(\frac{jRC\omega\left(1 - jRC\omega\right)}{1 + \omega^2 R^2 C^2}\right) = \frac{\omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$\mathrm{Im}(H) = \frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$|H| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\arg(H) = \frac{\pi}{2} - atan(\omega RC)$$

$Z = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$

$$\mathrm{Re}(Z) = Re\left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right) = R$$

$$\mathrm{Im}(Z) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\arg(Z) = atan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = atan\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right)$$

$Y = jC\omega + \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}$

$$\mathrm{Re}(Y) = Re\left(j\omega C + \frac{1}{R} - \frac{j}{\omega L}\right) = \frac{1}{R}$$

$$\mathrm{Im}(Y) = \omega C - \frac{1}{\omega L} = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L}$$

$$|Y| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L}\right)^2}$$

$$\arg(Y) = atan\left(\frac{\frac{\omega^2 LC-1}{\omega L}}{\frac{1}{R}}\right) = atan\left(\frac{\omega^2 RLC - R}{\omega L}\right)$$

$H = \frac{\frac{j\omega}{\omega_0}}{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+\frac{j\omega}{\omega_0 Q}}$

$$|H| = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}}$$

$$\arg(H) = \frac{\pi}{2} - atan\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_0 Q}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

$$\mathrm{Re}(H) = Re\left(\frac{\frac{j\omega}{\omega_0}\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{j\omega}{\omega_0 Q}\right)}{\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}\right) = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}{\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}$$

$$\mathrm{Im}(H) = Im\left(\frac{\frac{j\omega}{\omega_0}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-\frac{j\omega}{\omega_0 Q}\right)}{\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}\right) = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}$$

$H = \frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{\frac{R}{1+jRC\omega}+\frac{1+jRC\omega}{jC\omega}}$

$$\mathrm{Re}(H) = Re\left(\frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{\frac{R}{1+jRC\omega}+\frac{1+jRC\omega}{jC\omega}}\right) = Re\left(\frac{R}{R+\frac{(1+jRC\omega)^2}{jC\omega}}\right)$$

$$\mathrm{Re}(H) = Re\left(\frac{jRC\omega}{jRC\omega+(1+jRC\omega)^2}\right) = Re\left(\frac{jRC\omega}{1+3jRC\omega-\omega^2R^2C^2}\right)$$

Donc :

$$\mathrm{Re}(H) = Re\left(\frac{jRC\omega\left(1-\omega^2R^2C^2-3j\omega RC\right)}{\left(1-\omega^2R^2C^2\right)^2+9\omega^2R^2C^2}\right) = \frac{3\omega^2R^2C^2}{\left(1-\omega^2R^2C^2\right)^2+9\omega^2R^2C^2}$$

$$\mathrm{Im}(H) = \frac{\omega RC\left(1-\omega^2R^2C^2\right)}{\left(1-\omega^2R^2C^2\right)^2+9\omega^2R^2C^2}$$

$$|H| = \left|\frac{jRC\omega}{1+3j\omega RC-\omega^2R^2C^2}\right| = \frac{\omega RC}{\sqrt{\left(1-\omega^2R^2C^2\right)^2+9\omega^2R^2C^2}}$$

$$\arg(H) = arg\left(\frac{jRC\omega}{1+3j\omega RC-\omega^2R^2C^2}\right) = \frac{\pi}{2} - atan\left(\frac{3\omega RC}{1-\omega^2R^2C^2}\right)$$

■.

3.3 Inégalités

Démontrer que :

— $|x| \leq 1+x^2$

Si l'inégalité est vraie alors on a $-\left(1+x^2\right) \leq x \leq 1+x^2$ donc la double inégalité $\begin{cases} x^2-x+1 \geq 0 \\ x^2+x+1 \geq 0 \end{cases}$. Or les deux polynômes x^2-x+1 et x^2+x+1 sont convexes et n'admettent pas de racines réelles (car de discriminant négatif) ce qui démontre le résultat.■

— $(x+y)^2 \leq 2\left(x^2+y^2\right)$ Indice : partir de $(x-y)^2 \geq 0$ et développer.

$(x-y)^2 \geq 0$ donc $x^2+y^2 \geq 2xy$ donc $2\left(x^2+y^2\right) \geq x^2+y^2+2xy$ CQFD.■

3.4 Manipulation de factorielle

Simplifier au maximum les équations suivantes :

— $\frac{n!}{(n-2)!}$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (n-2) \times (n-1) \times n}{1 \times 2 \times \cdots \times (n-2)} = n\,(n-1)$$

■

— $\frac{n!}{n}$

$$\frac{n!}{n} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n}{n} = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) = (n-1)!$$

■

— $\frac{(n+2)(n+1)n}{(n+1)!}$

$$\frac{(n+2)\,(n+1)\,n}{(n+1)!} = \frac{(n+2)\,(n+1)\,n}{1 \times 2 \times \cdots \times n \times (n+1)} = n+2$$

■

— $\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n-1)!}$

$$\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{n\,(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1-n^2-n}{(n+1)!}$$

■

— $\frac{(2n-1)!}{(2n+2)!}$

$$\frac{(2n-1)!}{(2n+2)!} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (2n-1)}{1 \times 2 \times \cdots \times (2n-1) \times 2n \times (2n+1) \times (2n+2)} = \frac{1}{2n\,(2n+1)\,(2n+2)}$$

■