Université de Paris-Sud, 11
Faculté des sciences d'Orsay
L3 PIST

Probabilités

TD 5

Vecteurs aléatoires et vecteurs gaussiens

Exercice 1

Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance :

$$\mathbf{\Gamma_X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que X_3 et X_1, X_2, X_4 sont indépendant ?
2. Donner la loi marginale de $(X_1, X_2)^T$ et calculer $\mathbb{E}(X_1 | X_2)$.
3. Même question pour $(X_2, X_4)^T$.
4. Démontrer que $X_1 - X_2$ et $X_4 - X_2$ sont indépendant de X_2.

Exercice 2

Soit Y une variable aléatoire admettant la densité : $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi y}} e^{-y} \text{ si } y > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

On suppose que la loi conditionnelle de X sachant Y est une loi gaussienne : $X|Y \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2Y}\right)$.

1. Calculer la loi du vecteur $(X, Y)^T$ c'est-à-dire $f_{X,Y}(x, y)$.
2. Calculer la loi conditionnelle de Y sachant X c'est-à-dire $f_{Y|X}(y|x)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(Y|X)$.

Exercice 3

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. X est de loi exponentielle de paramètre 1 et Y de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Etudier le domaine de définition de $1 + Y$. Calculer $P(X \geq 3 \cap X - Y \geq 1)$.
2. Calculer $P(X - Y \geq 1)$.
3. Calculer $P(X \geq 3 \mid X - Y \geq 1)$. Cette probabilité est-elle plus petite ou plus grande que $P(X \geq 3)$?

Exercice 4

Soit $\alpha > 0$. On considére le couple $(X, Y) \in \left(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$ de variables aléatoires continues dont la densité de probabilité jointe est donnée par :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \alpha \text{ si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1, \\ \alpha \text{ si } -1 \leq x < -\frac{1}{2} \text{ et } |y| \leq 1, \\ \alpha \text{ si } |x| \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} < y \leq 1, \\ \alpha \text{ si } |x| \leq \frac{1}{2} \text{ et } -1 \leq y < -\frac{1}{2}, \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

1. Représenter $f_{X,Y}(x, y)$ dans le plan (X, Y). En raisonant sur ce dessin, calculer la constante α pour que $f_{X,Y}(x, y)$ soit bien une densité de probabilité.
2. Toujours en raisonant sur ce dessin, donner les densités de probabilités marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$. En déduire, en trouvant un contre-exemple, que X et Y sont des variables aléatoires non-indépendantes.
3. Les variables X et Y sont elles décorrélés ?

Exercice 5

On observe une quantité Y qui est la somme d'une quantité X que l'on cherche à déterminer et d'une erreur E, c'est-à-dire que $Y = X + E$. La quantité X, qui est à valeurs entière, est caractérisé par une loi de Poisson de paramètre θ. L'erreur E est binaire et est caractérisé par une loi de Bernoulli $P(E = 0) = 1 - p$ et $P(E = 1) = p$. Les deux variables aléatoires X et E sont supposées **indépendantes**.

1. **Sachant** que $X = n$, $n \in \mathbb{N}$, quelles sont les valeurs possibles pour Y? Calculer les probabilités conditionnelles correspondantes.
2. Calculer $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Y = n \text{ et } X = n)$ et $P(Y = n \text{ et } X = n - 1)$.
3. En déduire la distribution de probabilité marginale de Y.
4. Déterminer les (deux) distributions de probabilité $P(X = x | Y = n)$ et calculer $\mathbb{E}(X | Y)$.
5. Calculer la fonction caractéristique de Y.