Université de Paris-Sud, 11
Faculté des sciences d'Orsay
L3 PIST

Probabilités

TD 6

Convergences et théorèmes limites

Exercice 1

1. Soit $(X_n^a)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoire de loi exponentielle de paramètre n. Démontrer, en utilisant la définition, que $X_n^a \xrightarrow{P} 0$.

2. Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $[0,1]$ qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Soit $\left(X_n^b\right)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi Bernoulli de paramètre p_n. En utilisant la définition, montrer que X_n^b converge vers 0 en probabilité. Indice : étudier la probabilité $P\left(X_n^b \geq \varepsilon\right)$ en fonction des valeurs de ε.

3. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoire indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $X_n^c = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2 e^{-\frac{X_k^2}{3}}$. En utilisant la loi des grands nombres, démontrer que X_n^c converge en probabilité vers une limite que l'on précisera. On admettra la convergence en $+\infty$ de l'integrale $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx$ pour $\alpha > 0$.

4. A partir des résultats ci-dessus, conclure quant à la convergence en probabilité de $X_n^a + X_n^b + X_n^c$.

5. Soit $\left(X_n^d\right)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoire de loi binomiale de paramètre n et $\frac{\lambda}{n}$ (avec $0 < \lambda < n$).

a. Démontrer que $\underset{n\to+\infty}{lim} F_{X_n^d}(x) = lim\ \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$

b. Sachant que $ln\,(1+x) \underset{x=0}{\sim} x$. Etudier la convergence en loi de X_n^d.

6. Conclure quant à la convergence en loi de $X_n^c X_n^d$. Montrer, en téudiant le moyenne et la variance, que le résultat n'est pas une loi de Poisson.

Exercice 2

Il arrive assez souvent que le nombre de réservations pour une liaison aérienne soit supérieur au nombre de passagers se présentant effectivement le jour du vol. Cela est dû a des empêchements imprévisibles de certains passagers. Pour compenser ce phénoméne, une compagnie aérienne exploitant un avion de 300 places décide de faire de la surréservation (surbooking) en prenant pour chaque vol un nombre $n > 300$ de réservations. S'il se présente plus de 300 passagers a l'embarquement, les 300 premiers arrivés prennent leur vol et les autres sont dédommagés financièrement.

1. On considére que les passagers sont indépendants et que la probabilité de désistement de chacun d'eux est 10%. On note n le nombre de réservations prises par la compagnie pour un vol donné et S_n le nombre (aléatoire) de passagers se présentant a l'embarquement pour ce vol.

Reconnaître la loi de S_n, puis calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $Var(S_n)$. Relier la distribution de S_n à une somme de variable aléatoire de Bernouilli indépendante.

2. Le directeur commercial de la compagnie aimerait connaitre la valeur maximale de n telle que $P(S_n \leq 300) \geq 0,99$.

a. Ecrire le théorème de la limite centrale (version convergence vers une loi $\mathcal{N}(0,1)$).

b. Utiliser la table des valeurs de la fonction de répartition d'une variable aléatoire gaussienne Z centré réduite pour trouver la valeur de α telle que $P(Z \leq \alpha) \geq 0,99$.

c. En déduire la valeur maximale de n telle que $P(S_n \leq 300) \geq 0,99$.

Exercice 3

Afin de tester les performances d'un système de communications numériques, il est usuel de simuler le fonctionnement de ce système sur un ordinateur. Un des problèmes consiste alors à estimer la probabilité d'erreur p associé à ce système. On estime généralement cette probabilité comme suit :

$$\tilde{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

où X_i est une variable aléatoire binaire telle que $X_i = 1$ s'il y a une erreur au i-ème symbole (évenement de probabilité p) et $X_i = 0$ sinon.

Déterminer la moyenne et la variance de $\tilde{p}$ puis sa loi limite en utilisant le théorème de la limite centrale. On cherche le nombre de points N nécessaire pour que $\tilde{p}$ soit une approximation de p avec une précision relative inférieure à 10%. Pour cela, on se fixe un degré de confiance $\alpha = 95\%$, qui indique la probabilité d'avoir cette précision soit

$$P\left(\left|\frac{\tilde{p}-p}{p}\right| < \varepsilon\right) = \alpha$$

Déterminer N pour que l'égalité précédente soit vérifiée.