1 probabilités conditionnelle

1.1 activité

activité 1 :

un test est réalisé sur l'efficacité d'un vaccin.
1000 personnes participent au test.
les résultats sont résumés dans le tableau suivant

	vacciné	non vacciné	total
malade	120	180	300
non malade	480	220	700
total	600	400	1000

on choisit une personne au hasard parmi les 1000 personnes en supposant qu'il y a équiprobabilité

V signifie que "la personne a été vaccinée"
M signifie que "la personne est tombée malade"

(a) i. calculer les probabilités $p(V)$ et $p(V \cap M)$ et interpréter les résultats
ii. calculer la probabilité qu'une personne soit tombée malade sachant qu'elle a été vaccinée notée $p_V(M)$
iii. comparer $p_V(M)$ et $\dfrac{p(V \cap M)}{p(V)}$

(b) i. calculer les probabilités $p(\overline{V})$ et $p(\overline{V} \cap M)$ et interpréter les résultats
ii. calculer la probabilité qu'une personne soit tombée malade sachant qu'elle n'a pas été vaccinée notée $p_{\overline{V}}(M)$
iii. comparer $p_{\overline{V}}(M)$ et $\dfrac{p(\overline{V} \cap M)}{p(\overline{V})}$

(c) est-il plus probable que la personne soit tombée malade sachant qu'elle a été vaccinée ou non ?
le vaccin semble t-il efficace ?

(d) calculer $p_M(V)$ par deux méthodes, en déduire $p_M(\overline{V})$ et interpréter ces résultats

activité 2 :

un dé à six faces n'est pas bien équilibré, un échantillonnage a permis d'obtenir le tableau suivant

score X	1	2	3	4	5	6	total
fréquence	0,1	0,2	0,1	0,4	0,1	0,1	1

avec ce dé, est-il plus probable de faire un score d'au moins 5 points si le score est pair ou s'il est impair ?

1. calculer la probabilité que le score soit d'au moins 5 points sachant que le score est pair notée $p_{pair}(X \geq 5)$ en prenant pour définition $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$
2. calculer la probabilité que le score soit d'au moins 5 points sachant que le score est impair notée $p_{impair}(X \geq 5)$
3. conclure
4. calculer $p_{X \geq 5}(pair)$, $p_{X \geq 5}(impair)$ et interpréter ces résultats

1.2 corrigés activités

activité 1 :

un test est réalisé sur l'efficacité d'un vaccin.
1000 personnes participent au test.
les résultats sont résumés dans le tableau suivant

	vacciné	non vacciné	total
malade	120	180	300
non malade	480	220	700
total	600	400	1000

on choisit une personne au hasard parmi les 1000 personnes en supposant qu'il y a équiprobabilité

V signifie que "la personne a été vaccinée"
M signifie que "la personne est tombée malade"

(a) i. $p(V) = \dfrac{600}{1000} = 0,6 = \boxed{60\%}$ $\boxed{\text{la probabilité que la personne soit vaccinée est 60\%}}$

$p(V \cap M) = \dfrac{120}{1000} = 0,12 = \boxed{12\%}$ $\boxed{\text{la probabilité qu'elle soit vaccinée et malade est 12\%}}$

ii. probabilité qu'une personne soit tombée malade sachant qu'elle a été vaccinée :

$p_V(M) = \dfrac{120}{600} = 0,2 = \boxed{20\%}$

iii. $p_V(M) = 20\%$ et $\dfrac{p(V \cap M)}{p(V)} = \dfrac{0,12}{0,6} = 0,2 = 20\%$ donc $\boxed{p_V(M) = \dfrac{p(V \cap M)}{p(V)}}$

(b) i. $p(\overline{V}) = 1-p(V) = 1-0,6 = 0,4 = \boxed{40\%}$ $\boxed{\text{la probabilité que la personne ne soit pas vaccinée est 40\%}}$

$p(\overline{V} \cap M) = \dfrac{180}{1000} = 0,18 = \boxed{18\%}$ $\boxed{\text{la probabilité qu'elle ne soit pas vaccinée et malade est 18\%}}$

ii. probabilité qu'une personne soit tombée malade sachant qu'elle n'a pas été vaccinée :

$p_{\overline{V}}(M) = \dfrac{180}{400} = 0,45 = \boxed{45\%}$

iii. $p_{\overline{V}}(M) = 45\%$ et $\dfrac{p(\overline{V} \cap M)}{p(\overline{V})} = \dfrac{0,18}{0,4} = 0,45 = 45\%$ donc $\boxed{p_{\overline{V}}(M) = \dfrac{p(\overline{V} \cap M)}{p(\overline{V})}}$

(c) $\boxed{\text{il est plus probable que la personne soit tombée malade sachant qu'elle n'a pas été vaccinée}}$

en effet : $p_{\overline{V}}(M) = 0,45,\ \ p_V(M) = 0,2$ et $0,45 >,2$ $\boxed{\text{le vaccin semble donc efficace}}$

(d) $p_M(V) = \dfrac{120}{300} = 0,4 = \boxed{40\%}$ ou $p_M(V) = \dfrac{p(M \cap V)}{p(M)} = \dfrac{0,12}{\dfrac{300}{1000}} = \dfrac{0,12}{0,3} = \boxed{40\%}$

donc $p_M(\overline{V}) = 1 - 0,4 = 0,6 = \boxed{60\%}$

interprétation :

$\boxed{\text{la probabilité que la personne soit vaccinée sachant quelle est tombée malade est 40\%}}$

$\boxed{\text{la probabilité que la personne ne soit pas vaccinée sachant quelle est tombée malade est 60\%}}$

activité 2 :

un dé à six faces n'est pas bien équilibré, un échantillonnage a permis d'obtenir le tableau suivant

score X	1	2	3	4	5	6	total
fréquence	0,1	0,2	0,1	0,4	0,1	0,1	1

avec ce dé, est-il plus probable de faire un score d'au moins 5 points si le score est pair ou s'il est impair ?

1. $p_{pair}(X \geq 5) = \dfrac{p(6)}{p(2)+p(4)+p(6)} = \dfrac{p(pair \cap X \geq 5)}{p(pair)} = \dfrac{0,1}{0,2+0,4+0,1} = \dfrac{0,1}{0,7} \simeq \boxed{14\%}$

2. $p_{impair}(X \geq 5) = \dfrac{p(impair \cap X \geq 5)}{p(impair)} \dfrac{p(5)}{p(1)+p(3)+p(5)} == \dfrac{0,1}{0,1+0,1+0,1} = \dfrac{0,1}{0,3} \simeq \boxed{33\%}$

3. il est plus probable de faire un score d'au moins 5 points si le score est impair car $\boxed{33\% > 14\%}$

4. $p_{X\geq 5}(pair) = \dfrac{p(pair \cap X \geq 5)}{p(X \geq 5)} = \dfrac{0,1}{0,1+0,1} = \dfrac{0,1}{0,2} = \dfrac{1}{2} \simeq \boxed{50\%}$

   $p_{X\geq 5}(impair) = 1 - 0,5 = \boxed{50\%}$

   interprétation :

   $\boxed{\text{la probabilité de faire un score pair sachant que le score est d'au moins 5 points est 50\%}}$

   $\boxed{\text{la probabilité de faire un score impair sachant que le score est d'au moins 5 points est 50\%}}$

1.3 à retenir

définition 1 :

Soit un univers de probabilité U sur lequel est défini une probabilité p

Soient $A \subset U$ et $B \subset U$ deux événements de U avec $B \neq \emptyset$

la probabilité de "A sachant B" est le nombre noté $p_B(A)$ tel que : $\boxed{p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}}$

Remarques :

(a) $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(B \cap A)}{p(B)}$ car $B \cap A = A \cap B$

propriété 1 : (cas de l'équiprobabilité)

Dans le cas de l'équiprobabilité (où chaque éventualité a la même probabilité) on a :

$$\boxed{p_B(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables\ pour\ A \cap B}{nombre\ de\ cas\ favorables\ pour\ B}}$$

Justification :

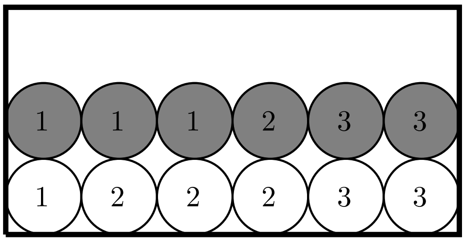
en effet $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ et s'il y a équiprobabilité on a alors :

$$p_B(A) = \frac{\dfrac{nombre\ de\ cas\ favorables\ pour\ A \cap B}{nombre\ de\ cas\ total}}{\dfrac{nombre\ de\ cas\ favorables\ pour B}{nombre\ de\ cas\ total}} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables\ pour\ A \cap B}{nombre\ de\ cas\ favorables\ pour\ B}$$

1.4 exercices

exercice 1 :

une urne contient 12 billes numérotées, noires ou blanches.



on choisit une bille au hasard avec équiprobabilité.
on note B pour "blanche" et N pour "noire"
répondre aux questions grâce à un calcul de probabilité

i. quel numéro est le plus probable ?
ii. quel numéro est le plus probable selon la couleur ?
iii. quelle couleur est la plus probable ?
iv. quelle couleur est la plus probable selon le numéro ?

exercice 2 :

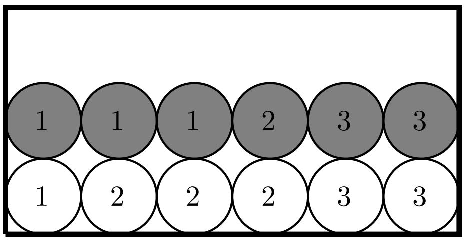
on dispose des données suivantes concernant une classe
$p(S \cap G) = 0,28$; $p(S \cap F) = 0,3$; $p(F) = 0,6$
où S signifie "sportif", G signifie "garçons" et F signifie "fille"

i. interpréter chacune des probabilités ci dessus
ii. calculer $p_G(S)$; $p_F(S)$ et interpréter
iii. calculer et $p(S)$ et interpréter
iv. calculer $p_S(G)$; $p_S(F)$ et interpréter
v. est-il plus probable de trouver un sportif parmi les filles ou parmi les garçons ?
vi. est-il plus probable de trouver un garçon ou bien une fille parmi les sportifs ?
vii. est-il plus probable de trouver un garçon sportif ou bien une fille sportive ?

1.5 corrigés exercices

corrigé exercice 1 :

une urne contient 12 billes numérotées, noires ou blanches.



on choisit une bille au hasard avec équiprobabilité.
on note B pour "blanche" et N pour "noire"
répondre aux questions grâce à un calcul de probabilité

i. $p(1) = p(2) = p(3) = \boxed{\dfrac{4}{12}}$
donc les numéros ont la même probabilité

ii. quel numéro est le plus probable selon la couleur ?
$p_{blanc}(1) = \dfrac{1}{6}$ $\quad p_{blanc}(2) = \dfrac{3}{6}$ $\quad p_{blanc}(3) = \dfrac{2}{6}$ $\boxed{\text{sachant qu'il est blanc, le 2 est plus probable}}$
$p_{noir}(1) = \dfrac{3}{6}$ $\quad p_{noir}(2) = \dfrac{1}{6}$ $\quad p_{noir}(3) = \dfrac{2}{6}$ $\boxed{\text{sachant qu'il est noir, le 1 est plus probable}}$

iii. quelle couleur est la plus probable ?
$p(blanc) = p(noir) = \dfrac{6}{12}$ donc $\boxed{\text{les deux couleurs ont la même probabilité}}$

iv. quelle couleur est la plus probable selon le numéro ?
$p_1(noir) = \dfrac{3}{4}$ et $p_1(blanc) = \dfrac{1}{4}$ $\boxed{\text{sachant que c'est 1 , le noir est plus probable}}$
$p_2(noir) = \dfrac{1}{4}$ et $p_2(blanc) = \dfrac{3}{4}$ $\boxed{\text{sachant que c'est 2 , le blanc est plus probable}}$
$p_3(noir) = \dfrac{2}{4}$ et $p_3(blanc) = \dfrac{2}{4}$
$\boxed{\text{sachant que c'est 3 , les deux couleurs ont la même probabilité}}$

corrigé exercice 2 :

on dispose des données suivantes concernant une classe
$p(S \cap G) = 0,28\,;\; p(S \cap F) = 0,3\,;\; p(F) = 0,6$
où S signifie "sportif", G signifie "garçons" et F signifie "fille"

i. interpréter chacune des probabilités ci dessus
$p(S \cap G) = 0,28$: la probabilité qu'un élève de cette classe soit "un garçon et sportif" est de 28%
$p(S \cap F) = 0,3$: la probabilité qu'un élève de cette classe soit "une fille et sportive" est de 30%
$p(F) = 0,6$: la probabilité qu'un élève de cette classe soit "une fille" est de 60%

ii. calculer $p_G(S)\,;\; p_F(S)$ et interpréter
$$\boxed{p_G(S) = \frac{p(G \cap S)}{p(G)}} = \frac{0,28}{1-0,6} = 0,7$$
sachant qu'il est garçon, la probabilité que l'élève soit sportif est de 70%

$$\boxed{p_F(S) = \frac{p(F \cap S)}{p(F)}} = \frac{0,30}{0,6} = 0,5$$
sachant que c'est une fille, la probabilité que l'élève soit sportive est de 50%

iii. calculer et $p(S)$ et interpréter
$$\boxed{p(S) = p(S \cap G) + p(S \cap F)} = 28\% + 30\% = 58\%$$
la probabilité qu'un élève de cette classe soit sportif est de 58%

iv. calculer $p_S(G)\,;\; p_S(F)$ et interpréter
$$\boxed{p_S(G) = \frac{p(G \cap S)}{p(S)}} = \frac{0,28}{0,58} \simeq 0,48$$
sachant qu'il est sportif, la probabilité que l'élève soit un garçon est d'environs 48%

$$\boxed{p_S(F) = \frac{p(F \cap S)}{p(S)}} = \frac{0,30}{0,58} \simeq 0,52$$
sachant que c'est une sportive, la probabilité que l'élève soit une fille est d'environs 52%

v. est-il plus probable de trouver un sportif parmi les filles ou parmi les garçons ?
$\boxed{\text{parmi les garçons}}$ car $p_G(S) > p_F(S) \quad (0,7 > 0,5)$

vi. est-il plus probable de trouver un garçon ou bien une fille parmi les sportifs ?
$\boxed{\text{une fille}}$ car $p_S(G) < p_S(F) \quad (0,48 < 0,52)$

vii. est-il plus probable de trouver un garçon sportif ou bien une fille sportive ?
$\boxed{\text{une fille sportive}}$ car $p(S \cap G) < p(S \cap F) \quad (0,28 < 0,3)$

2 intersection, probabilité totale et arbres pondérés

2.1 activité

activité 1

(a) à partir de la définition de $p_B(A)$, démontrer que $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$

(b) à partir de la définition de $p_A(B)$, démontrer que $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$

(c) on sait qu'il y a 60% de garçons dans ce groupe dont 90% sont droitiers,
de plus, 95% de filles sont droitière
on choisit au hasard une des personnes de ce groupe, calculer les probabilités suivantes

i. la personne est un garçon droitier

ii. la personne est une fille droitière

iii. la personne est droitière

iv. la personne est un garçon sachant qu'elle est droitière

v. la personne est une fille sachant qu'elle est droitière

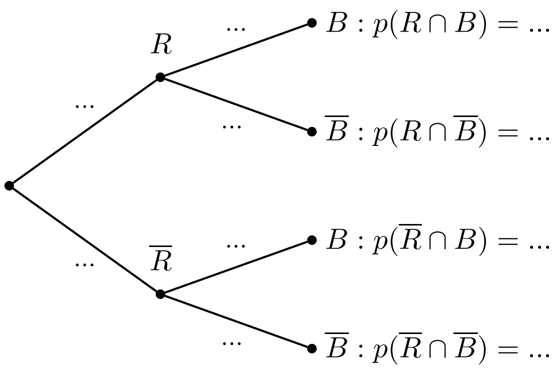
activité 2

(a) un sondage est effectué sur une population de terminales après les résultats du bac
90% ont révisé sérieusement dont 80% ont eu le bac
30% de ceux qui n'ont pas révisé sérieusement ont eu le bac
on note B pour "a eu le bac" et R pour "a révisé sérieusement"

i. traduire les données ci dessus en termes de probabilités avec les notations mathématiques

ii. on organise les données dans l'arbre pondéré ci dessous

1. compléter l'arbre des données numériques qui manquent



2. calculer $p(R \cap B)$ et $p(\overline{R} \cap B)$
3. en déduire $p(B)$ et $p(\overline{B})$
4. en déduire $p_{\overline{B}}(R)$ et $p_{\overline{B}}(\overline{R})$
5. pour cette population, est-il plus probable d'avoir le bac avec ou sans révision ?
6. interpréter les résultats de la question 4. (est-ce paradoxal ou non ?)

2.2 corrigés activités

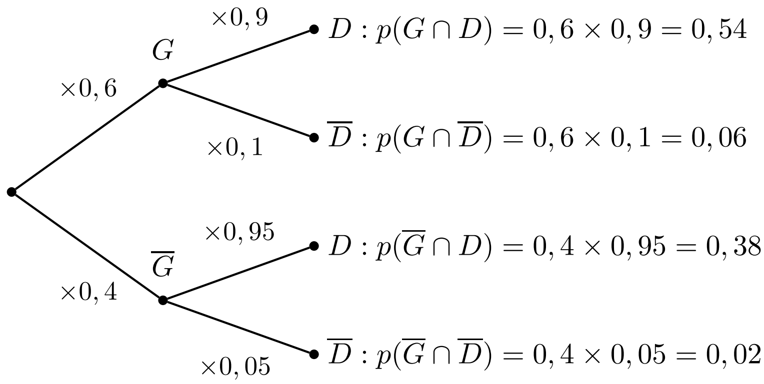
corrigé activité 1

(a) $p_B(A) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$ donc $\boxed{p(A\cap B) = p(B)\times p_B(A)}$ (produit en croix)

(b) $p_A(B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$ donc $\boxed{p(A\cap B) = p(A)\times p_A(B)}$ (produit en croix)

(c) on sait qu'il y a 60% de garçons dans ce groupe dont 90% sont droitiers,
de plus, 95% de filles sont droitière
on choisit au hasard une des personnes de ce groupe, calculer les probabilités suivantes

on peut construire un arbre pondéré



i. la personne est un garçon droitier : $\boxed{p(G\cap D) = 0,54}$

ii. la personne est une fille droitière : $\boxed{p(F\cap D) = 0,38}$

iii. la personne est droitière $\boxed{p(D) = p(G\cap D) + p(\overline{G}\cap D) = 0,54 + 0,38 = 0,92}$

iv. la personne est un garçon sachant qu'elle est droitière

$\boxed{p_D(G) = \dfrac{p(G\cap D)}{p(D)}} = \dfrac{0,54}{0,92} \simeq 0,59$

v. la personne est une fille sachant qu'elle est droitière

$\boxed{p_D(F) = \dfrac{p(F\cap D)}{p(D)}} = \dfrac{0,38}{0,92} \simeq 0,41$

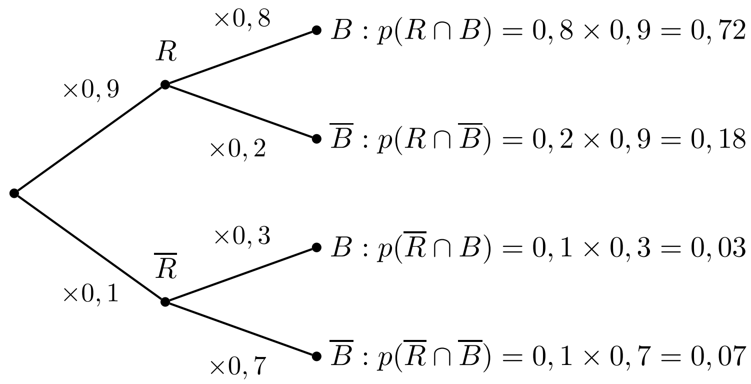
corrigé activité 2

(a) un sondage est effectué sur une population de terminales après les résultats du bac
90% ont révisé sérieusement dont 80% ont eu le bac
30% de ceux qui n'ont pas révisé sérieusement ont eu le bac
on note B pour "a eu le bac" et R pour "a révisé sérieusement"

i. traduire les données ci dessus en termes de probabilités avec les notations mathématiques

ii. on organise les données dans l'arbre pondéré ci dessous

1. compléter l'arbre des données numériques qui manquent



2. $\boxed{p(R \cap B) = 0,72}$ et $\boxed{p(\overline{R} \cap B) = 0,03}$

3. $\boxed{p(B) = p(R \cap B) + p(\overline{R} \cap B)} = 0,72 + 0,03 = 0,75$
$\boxed{p(\overline{B}) = 1 - p(B)} = 1 - 0,75 = 0,25$

4. $\boxed{p_{\overline{B}}(R) = \dfrac{p(\overline{B} \cap R)}{p(\overline{B})}} = \dfrac{0,18}{0,25} = 0,72$
$\boxed{p_{\overline{B}}(\overline{R}) = 1 - p_{\overline{B}}(R)} = 1 - 0,72 = 0,28$

5. pour cette population, est-il plus probable d'avoir le bac avec ou sans révision ?
$\boxed{\text{avec révision}}$, car $p_R(B) > p_{\overline{R}}(B) \quad (0,8 > 0,3)$

6. interpréter les résultats de la question 4. (est-ce paradoxal ou non ?)
$\boxed{\text{La probabilité d'avoir révisé sachant que l'on n'a pas eu le bac de 72\%}}$
$\boxed{\text{La probabilité de ne pas avoir révisé sachant que l'on n'a pas eu le bac de 28\%}}$
ce qui n'est pas paradoxal car on peut supposer que $\boxed{\text{tous les élèves ont révisé}}$

2.3 à retenir

propriété 2 :

> Soit un univers de probabilité U sur lequel est défini une probabilité p
>
> Soient $A \subset U$ et $B \subset U$ deux événements de U
> la probabilité de l'événement $A \cap B$ est telle que :
>
> $\boxed{p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)}$ et aussi $\boxed{p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)}$

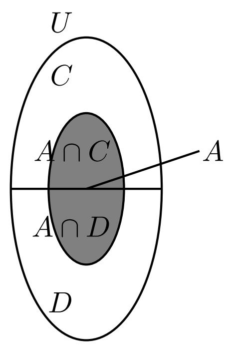
Remarques :

(a) en général on a : $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$

(l'égalité sera vraie si et seulement si les événements A et B sont "indépendants", défini plus loin)

propriété 3 : (probabilité totale)

> Soit un univers de probabilité U sur lequel est défini une probabilité p
>
> Soient $C \subset U$ et $D \subset U$ deux événements de U tels que $C \cup D = U$ et $C \cap D = \emptyset$
> (on dit que C et D réalisent une partition de l'univers U)
> la probabilité de l'événement A est telle que :
>
> $\boxed{p(A) = p(A \cap C) + p(A \cap D)}$ et aussi $\boxed{p(A) = p(C) \times p_C(A) + p(D) \times p_D(A)}$

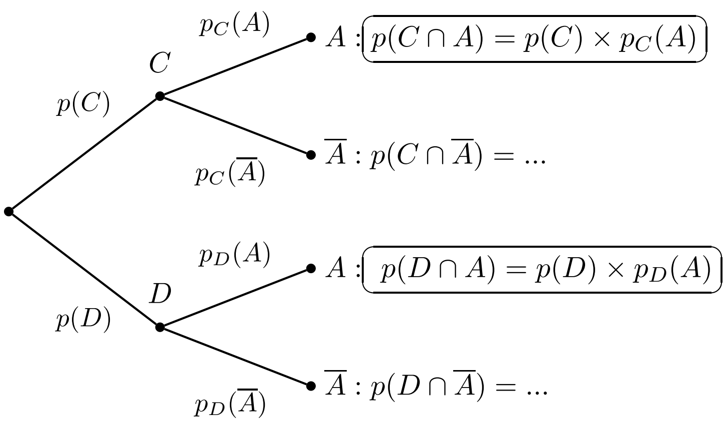


Remarques :

(a) en particulier avec $D = \overline{C}$ on a : $p(A) = p(A \cap C) + p(A \cap \overline{C})$

(b) cette propriété se généralise pour une partition de U en trois, quatre ou n parties ou n est un entier naturel positif strict

(c) on visualise cette propriété avec l'arbre pondéré ci dessous



$$p(A) = p(A \cap C) + p(A \cap D)$$

$$\boxed{p(A) = p(C) \times p_C(A) + p(D) \times p_D(A)}$$

2.4 exercices

exercice 3 :

Une entreprise a équipé chacun de ses employés d'un seul ordinateur.
Pour le suivi de ses ordinateurs, l'entreprise fait appel à un même service de maintenance informatique.
Pour évaluer ce service, l'entreprise réalise une enquête et dispose ainsi, pour chaque employé, d'une fiche précisant la marque de son ordinateur et son avis sur le service de maintenance.
Il y a trois marques d'ordinateurs Aliet, Balart et Celt.

- 25 % des employés ont un ordinateur Aliet,
- 40 % des employés ont un ordinateur Balart,
- le reste des employés a un ordinateur Celt.

L'enquête a fourni les résultats suivants :

- parmi les employés équipés d'un ordinateur Aliet, 90 % sont satisfaits du service de maintenance,
- parmi les employés équipés d'un ordinateur Balart, 65 % sont satisfaits du service de maintenance,
- parmi les employés équipés d'un ordinateur Celt, 80 % sont satisfaits du service de maintenance.

On choisit au hasard la fiche d'un employé de l'entreprise, chacune ayant la même probabilité d'être choisie.
On note :

- A l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet »,
- B l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Balart »,
- C l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Celt »,
- S l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance ».

(a) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

(b) Calculer la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet et satisfait du service de maintenance.

(c) Démontrer que la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé satisfait du service de maintenance est 0,765.

(d) Sachant que la fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance, calculer la probabilité que cet employé soit équipé d'un ordinateur de la marque Celt.
Le résultat sera arrondi à 10^{-3}.

exercice 4 :

On s'intéresse à la population des personnes âgées de plus de 65 ans d'un certain pays en 2006.
Dans cette population :

- 58 % sont des femmes ;
- 5 % des personnes sont atteintes d'une maladie incurable appelée maladie A et parmi celles-ci les deux tiers sont des femmes.

On choisit au hasard une personne dans cette population.
On note :

- F l'évènement : « la personne choisie est une femme » ;
- H l'évènement : « la personne choisie est un homme » ;
- A l'évènement : « la personne choisie est atteinte de la maladie A » ;
- $\overline{A}$ l'évènement : « la personne choisie n'est pas atteinte de la maladie A ».

Les résultats seront arrondis au millième.

(a) i. Donner la probabilité de l'évènement F et celle de l'évènement A.
Donner la probabilité de l'évènement F sachant que l'évènement A est réalisé, notée $p_A(F)$.

ii. Définir par une phrase l'évènement $A \cap F$ puis calculer sa probabilité.

iii. Montrer que la probabilité de l'évènement A sachant que F est réalisé est égale à $0,057$ à 10^{-3} près.

(b) La personne choisie est un homme. Démontrer que la probabilité que cet homme soit atteint de la maladie A est égale à $0,040$ à 10^{-3} près.

(c) Peut-on affirmer que, dans ce pays en 2006, dans la population des personnes âgées de plus de 65 ans, une femme risquait davantage de développer la maladie A qu'un homme ? Justifier.

<u>exercice 5 :</u> (*D'après sujet bac Polynésie Septembre 2010*)

« Un geste qui sauve : en France, chaque année, 55 000 personnes sont victimes d'un accident cardio-vasculaire. Sept fois sur dix, ces accidents surviennent devant témoin. » (*Source : TNS / Fédération Française de Cardiologie, 2009*).

En 2009, environ 36 % de la population française a appris à accomplir les gestes qui sauvent.

partie 1

Lors d'un accident cardio-vasculaire devant témoins, on admet que la proportion de témoins formés aux gestes qui sauvent suit la proportion nationale.

On admet alors que la probabilité qu'un accident cardio-vasculaire se produise devant un témoin formé aux gestes qui sauvent est de 0,25 ($0,7 \times 0,36 = 0,252 \simeq 0,25$).

Lorsque l'accident cardio-vasculaire s'est produit devant un témoin formé aux gestes qui sauvent, la probabilité que le malade survive est 0,1.

Sinon, la probabilité que le malade survive est de 0,007.

On appelle T l'évènement : « L'arrêt cardiaque s'est produit devant un témoin formé aux gestes qui sauvent ».

On appelle S l'évènement : « Le malade survit à l'arrêt cardiaque ».

On appelle $\overline{T}$ et $\overline{S}$ les évènements contraires à T et à S.

Rappel de notation : Si A et B sont deux évènements donnés, $p(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

On pourra s'aider d'un arbre pondéré. Les résultats seront arrondis au centième.

(a) Déterminer, d'après l'énoncé, $p(T)$, $p_T(S)$ et $p_{\overline{T}}(S)$.

(b) En déduire $p(T \cap S)$.

(c) Vérifier que la valeur arrondie au centième de $p(S)$ est 0,03.

(d) Interpréter ces deux derniers résultats.

(e) Justifier que le nombre de victimes d'accidents cardiaques survivant à cet accident peut s'estimer à environ 1 650.

partie 2

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

En 2015 tous les lieux publics (stades, centres commerciaux, ...) seront équipés en défibrillateurs. Par ailleurs, un sondage montre qu'environ 71 % de la population souhaite se former à accomplir les gestes qui sauvent. Si ce taux de formation est atteint :

- la probabilité que l'accident cardiaque survienne devant un témoin formé aux gestes qui sauvent serait de $0,5$;
- la probabilité de survie en cas d'intervention d'un témoin formé aux gestes qui sauvent serait augmentée à $0,25$, et $0,046$ sinon.

Déterminer combien de vies supplémentaires pourraient être sauvées si ces conditions étaient satisfaites.

exercice 6 : *(D'après sujet bac France Métropolitaine Septembre 2009)*

Dans un lycée général et technologique, il y a 1400 lycéens : des élèves de seconde, première ou terminale, et des étudiants en section de technicien supérieur (STS).

Pour pouvoir disposer des collections de manuels scolaires, tous les lycéens doivent adhérer à la coopérative scolaire et payer une location annuelle d'un montant de 50 euros pour les élèves et 60 euros pour les étudiants.

Sur l'ensemble des adhérents à la coopérative scolaire, 62,5 % sont les élèves de seconde, première ou terminale. Les autres sont les étudiants de STS.

Depuis quelques années, les élèves de seconde, première ou terminale disposent de chèques-lire avec lesquels ils peuvent régler cette location :

- 40 % paient leur location à l'aide de chèques-lire,
- 56 % paient par chèque bancaire,
- les autres paient par mandat ou en liquide.

Les étudiants de STS ne disposent pas de chèques-lire :

- 96 % paient par chèque bancaire,
- les autres paient par mandat ou en liquide.

Les parties I et II sont indépendantes

partie i

Les 1400 lycéens, élèves comme étudiants, adhèrent à cette coopérative.

(a) Calculer le montant des versements effectués par chèque bancaire.

(b) Calculer le pourcentage du montant total des locations que cette somme représente.

partie ii

On prend au hasard la fiche d'un adhérent à la coopérative scolaire parmi les 1400 fiches.

On note :

L l'évènement « l'adhérent est un élève » ;
E l'évènement « l'adhérent est un étudiant en STS » ;
C l'évènement « l'adhérent paie avec ses chèques-lire » ;
B l'évènement « l'adhérent paie avec un chèque bancaire » ;
A l'évènement « l'adhérent paie par un autre moyen de paiement ».

(a) Traduire à l'aide d'un arbre pondéré la situation décrite ci-dessus.

(b) i. Calculer la probabilité que l'adhérent soit un élève ayant payé sa location à l'aide de chèques-lire.

ii. Calculer la probabilité que l'adhérent soit un étudiant en STS ayant payé sa location à l'aide d'un chèque bancaire.

iii. Démontrer que la probabilité que l'adhérent ait payé par chèque bancaire est de 0,71.

(c) Un adhérent a payé par chèque bancaire. Calculer le probabilité que ce soit un élève.

2.5 corrigés exercices

corrigé exercice 3 :

Une entreprise a équipé chacun de ses employés d'un seul ordinateur.

Pour le suivi de ses ordinateurs, l'entreprise fait appel à un même service de maintenance informatique.

Pour évaluer ce service, l'entreprise réalise une enquête et dispose ainsi, pour chaque employé, d'une fiche précisant la marque de son ordinateur et son avis sur le service de maintenance.

Il y a trois marques d'ordinateurs Aliet, Balart et Celt.

- 25 % des employés ont un ordinateur Aliet,
- 40 % des employés ont un ordinateur Balart,
- le reste des employés a un ordinateur Celt.

L'enquête a fourni les résultats suivants :

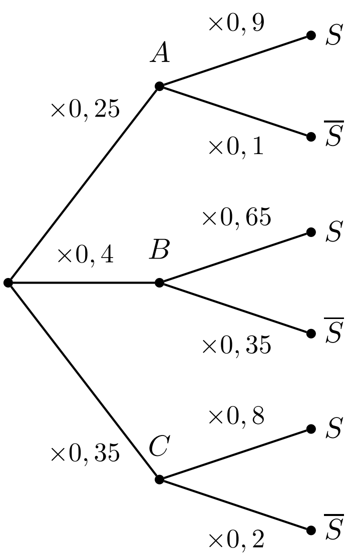
- parmi les employés équipés d'un ordinateur Aliet, 90 % sont satisfaits du service de maintenance,
- parmi les employés équipés d'un ordinateur Balart, 65 % sont satisfaits du service de maintenance,
- parmi les employés équipés d'un ordinateur Celt, 80 % sont satisfaits du service de maintenance.

On choisit au hasard la fiche d'un employé de l'entreprise, chacune ayant la même probabilité d'être choisie.

On note :

- A l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet »,
- B l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Balart »,
- C l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Celt »,
- S l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance ».

(a) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.



(b) Calculer la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet et satisfait du service de maintenance.

$\boxed{p(A \cap S = p(A) \times p_A(S)} = 0,25 \times 0,9 = 0,225$

(c) Démontrer que la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé satisfait du service de maintenance est 0,765.

$\boxed{p(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S)} = 0,25 \times 0,9 + 0,4 \times 0,65 + 0,35 \times 0,8 = 0,765$

(d) Sachant que la fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance, calculer la probabilité que cet employé soit équipé d'un ordinateur de la marque Celt.

$\boxed{p_S(C) = \dfrac{p(S \cap C)}{p(S)}} = \dfrac{0,35 \times 0,8}{0,765} \simeq 0,36$ *Le résultat sera arrondi à* 10^{-3}.

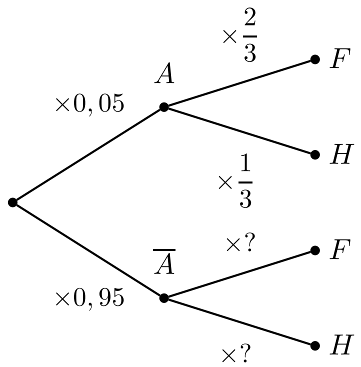
corrigé exercice 4 :

On s'intéresse à la population des personnes âgées de plus de 65 ans d'un certain pays en 2006.
Dans cette population :
– 58 % sont des femmes ;
– 5 % des personnes sont atteintes d'une maladie incurable appelée maladie A et parmi celles-ci les deux tiers sont des femmes.

On choisit au hasard une personne dans cette population.
On note :
– F l'évènement : « la personne choisie est une femme » ;
– H l'évènement : « la personne choisie est un homme » ;
– A l'évènement : « la personne choisie est atteinte de la maladie A » ;
– $\overline{A}$ l'évènement : « la personne choisie n'est pas atteinte de la maladie A ».

Les résultats seront arrondis au millième.

(a)



i. Donner la probabilité de l'évènement F et celle de l'évènement A.
$\boxed{p(F) = 0,58}$ et $\boxed{p(A) = 0,05}$

Donner la probabilité de l'évènement F sachant que l'évènement A est réalisé, notée $p_A(F)$.
$\boxed{p_A(F) = \frac{2}{3}}$

ii. Définir par une phrase l'évènement $A \cap F$ puis calculer sa probabilité.
$\boxed{\text{probabilité que la personne soit atteinte de la maladie } A \text{ et qu'elle soit une femme}}$
$\boxed{p(A \cap F) = 0,05 \times \frac{2}{3} \simeq 0,033}$

iii. Montrer que la probabilité de l'évènement A sachant que F est réalisé est égale à $0,057$ à 10^{-3} près.
$\boxed{p_F(A) = \frac{p(A \cap F)}{p(F)}} = \frac{0,05 \times \frac{2}{3}}{0,58} \simeq 0,057$

(b) La personne choisie est un homme. Démontrer que la probabilité que cet homme soit atteint de la maladie A est égale à $0,040$ à 10^{-3} près.
$\boxed{p_H(A) = \frac{p(A \cap H)}{p(H)}} = \frac{0,05 \times \frac{1}{3}}{1 - 0,58} \simeq 0,040$

(c) Peut-on affirmer que, dans ce pays en 2006, dans la population des personnes âgées de plus de 65 ans, une femme risquait davantage de développer la maladie A qu'un homme ? Justifier.
$\boxed{\text{oui}}$ car $\boxed{p_H(A) < p_F(A)}$ $(0,04 < 0,057)$

corrigé exercice 5 : *(D'après sujet bac Polynésie Septembre 2010)*

« Un geste qui sauve : en France, chaque année, 55 000 personnes sont victimes d'un accident cardio-vasculaire. Sept fois sur dix, ces accidents surviennent devant témoin. » (*Source : TNS / Fédération Française de Cardiologie, 2009*).

En 2009, environ 36 % de la population française a appris à accomplir les gestes qui sauvent.

partie 1

Lors d'un accident cardio-vasculaire devant témoins, on admet que la proportion de témoins formés aux gestes qui sauvent suit la proportion nationale.

On admet alors que la probabilité qu'un accident cardio-vasculaire se produise devant un témoin formé aux gestes qui sauvent est de 0,25 ($0,7 \times 0,36 = 0,252 \simeq 0,25$).

Lorsque l'accident cardio-vasculaire s'est produit devant un témoin formé aux gestes qui sauvent, la probabilité que le malade survive est 0,1.

Sinon, la probabilité que le malade survive est de 0,007.

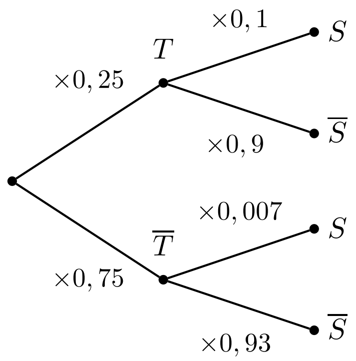
On appelle T l'évènement : « L'arrêt cardiaque s'est produit devant un témoin formé aux gestes qui sauvent ».

On appelle S l'évènement : « Le malade survit à l'arrêt cardiaque ».

On appelle $\overline{T}$ et $\overline{S}$ les évènements contraires à T et à S.

RAPPEL DE NOTATION : Si A et B sont deux évènements donnés, $p(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

On pourra s'aider d'un arbre pondéré. Les résultats seront arrondis au centième.



(a) d'après l'énoncé :
$\boxed{p(T) = 0,25}$
$\boxed{p_T(S) = 0,1}$
$\boxed{p_{\overline{T}}(S) = 0,07}$

(b) $\boxed{p(T \cap S) = p(T) \times p_T(S)} = 0,25 \times 0,1 = \boxed{0,025}$

(c) $\boxed{p(S) = p(T \cap S) + p(\overline{T} \cap S)} = 0,25 \times 0,1 + 0,75 \times 0,007 = 0,03025 \simeq \boxed{0,03}$

(d) Interpréter ces deux derniers résultats.
$p(T \cap S) = 0,025$:
la probabilité de l'évènement : « L'arrêt cardiaque s'est produit devant un témoin formé aux gestes qui sauvent et la personne survit »est de $2,5\%$

$p(S) = 0,03$:
la probabilité de l'évènement : « la personne atteinte de l'attaque cardiaque survie » est de $\simeq 3\%$

(e) Justifier que le nombre de victimes d'accidents cardiaques survivant à cet accident peut s'estimer à environ 1 650 : $\boxed{55000 \times 0,03 = 1650}$

partie 2

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

En 2015 tous les lieux publics (stades, centres commerciaux, ...) seront équipés en défibrillateurs. Par ailleurs, un sondage montre qu'environ 71 % de la population souhaite se former à accomplir les gestes qui sauvent. Si ce taux de formation est atteint :

- la probabilité que l'accident cardiaque survienne devant un témoin formé aux gestes qui sauvent serait de $0,5$;
- la probabilité de survie en cas d'intervention d'un témoin formé aux gestes qui sauvent serait augmentée à $0,25$, et $0,046$ sinon.

Déterminer combien de vies supplémentaires pourraient être sauvées si ces conditions étaient satisfaites.

$p(S) = 0,5 \times 0,25 + 0,5 \times 0,046 = \boxed{0,148}$

nombre de personnes à survivre $= 0,148 \times 55000 = \boxed{8140}$

nombre de vies supplémentaires sauvées : $8140 - 1650 = \boxed{6490}$

corrigé exercice 6 : (*D'après sujet bac France Métropolitaine Septembre 2009*)

Dans un lycée général et technologique, il y a 1400 lycéens : des élèves de seconde, première ou terminale, et des étudiants en section de technicien supérieur (STS).

Pour pouvoir disposer des collections de manuels scolaires, tous les lycéens doivent adhérer à la coopérative scolaire et payer une location annuelle d'un montant de 50 euros pour les élèves et 60 euros pour les étudiants.

Sur l'ensemble des adhérents à la coopérative scolaire, 62,5 % sont les élèves de seconde, première ou terminale. Les autres sont les étudiants de STS.

Depuis quelques années, les élèves de seconde, première ou terminale disposent de chèques-lire avec lesquels ils peuvent régler cette location :

– 40 % paient leur location à l'aide de chèques-lire,
– 56 % paient par chèque bancaire,
– les autres paient par mandat ou en liquide.

Les étudiants de STS ne disposent pas de chèques-lire :

– 96 % paient par chèque bancaire,
– les autres paient par mandat ou en liquide.

Les parties I et II sont indépendantes

partie i

Les 1400 lycéens, élèves comme étudiants, adhèrent à cette coopérative.

(a) Calculer le montant des versements effectués par chèque bancaire.

(b) Calculer le pourcentage du montant total des locations que cette somme représente.

partie ii

On prend au hasard la fiche d'un adhérent à la coopérative scolaire parmi les 1400 fiches.

On note :

L l'évènement « l'adhérent est un élève » ;
E l'évènement « l'adhérent est un étudiant en STS » ;
C l'évènement « l'adhérent paie avec ses chèques-lire » ;
B l'évènement « l'adhérent paie avec un chèque bancaire » ;
A l'évènement « l'adhérent paie par un autre moyen de paiement ».

(a) Traduire à l'aide d'un arbre pondéré la situation décrite ci-dessus.

(b) i. Calculer la probabilité que l'adhérent soit un élève ayant payé sa location à l'aide de chèques-lire.

ii. Calculer la probabilité que l'adhérent soit un étudiant en STS ayant payé sa location à l'aide d'un chèque bancaire.

iii. Démontrer que la probabilité que l'adhérent ait payé par chèque bancaire est de 0,71.

(c) Un adhérent a payé par chèque bancaire. Calculer le probabilité que ce soit un élève.

3 événements indépendants

3.1 activité

activité 1

on dispose des informations suivantes sur les élèves d'un lycée

	porte des lunettes	ne porte pas de lunette	total
fille	150	450	600
garçon	100	300	400
total	250	750	1000

on choisit un élève au hasard parmi les 1000 en supposant qu'il y a équiprobabilité
L signifie que "l'élève porte des lunettes"
F signifie que "l'élève est une fille " et G "un garçon"

- On cherche à savoir si les événements "fille" et "lunette" sont indépendants
  i. méthode 1 :
  calculer les probabilités $p(L)$ et $p_F(L)$
  d'après ce résultat, le fait d'être une fille influe t-il sur la probabilité de porter des lunettes ?
  si $p(L) = p_F(L)$ alors F et L sont indépendants, que conclure pour F et L ?

  ii. méthode 2 :
  calculer les probabilités $p(F)$ et $p_L(F)$
  d'après ce résultat, le fait de porter des lunettes influe t-il sur la probabilité d'être une fille ?
  si $p(F) = p_L(F)$ alors F et L sont indépendants, que conclure pour F et L ?

  iii. méthode 3 :
  1. $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ deux événements, montrer que : si $p_A(B) = p(B)$ alors $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$
  2. $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ deux événements, montrer que : si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ alors $p_A(B) = p(B)$
  3. calculer les probabilités $p(F)$, $p(L)$ et $p(L \cap F)$
  calculer $p(F) \times p(L)$
  si $p(F) \times p(L)$ alors F et L sont indépendants, que conclure pour F et L ?

- déterminer si G et L sont indépendants puis incompatibles
- déterminer si G et F sont indépendants

activité 2

un dé à 8 faces n'est pas bien équilibré, un échantillonnage a permis d'obtenir le tableau suivant

score X	1	2	3	4	5	6	7	8	total
fréquence	0,05	0,1	0,05	0,2	0,1	0,3	0,1	0,1	1

i. les événements "pair" et "$X \leq 4$" sont-ils indépendants ? incompatibles ?
ii. les événements "$X \geq 4$" et "$X \leq 4$" sont-ils indépendants ? incompatibles ?

3.2 corrigé activité

corrigé activité 1

on dispose des informations suivantes sur les élèves d'un lycée

	porte des lunettes	ne porte pas de lunette	total
fille	150	450	600
garçon	100	300	400
total	250	750	1000

on choisit un élève au hasard parmi les 1000 en supposant qu'il y a équiprobabilité
L signifie que "l'élève porte des lunettes"
F signifie que "l'élève est une fille " et G "un garçon"

- On cherche à savoir si les événements "fille" et "lunette" sont indépendants

i. méthode 1 :

$\boxed{p(L) = \dfrac{250}{1000} = 25\%}$ et $\boxed{p_F(L) = \dfrac{150}{600} = 25\%}$

d'après ce résultat, le fait d'être une fille ne semble pas influencer la probabilité de porter des lunettes

si $p(L) = p_F(L)$ alors F et L sont indépendants, que conclure pour F et L ?

$\boxed{p(L) = p_F(L) = 25\%}$ donc $\boxed{F \text{ et } L \text{ sont indépendants}}$

ii. méthode 2 :

$\boxed{p(F) = \dfrac{600}{1000} = 60\%}$ et $\boxed{p_L(F) = \dfrac{150}{250} = 60\%}$

d'après ce résultat, le fait de porter des lunettes ne semble pas influencer la probabilité d'être une fille

si $p(F) = p_L(F)$ alors F et L sont indépendants, que conclure pour F et L ?

$\boxed{p(F) = p_L(F) = 60\%}$ donc $\boxed{F \text{ et } L \text{ sont indépendants}}$

iii. méthode 3 :

1. $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ deux événements, montrer que : si $p_A(B) = p(B)$ alors $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$
   on sait que : $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$ *(cours)*
   si de plus : $p_A(B) = p(B)$
   alors : $p(A \cap B) = p(B) \times p(A)$

2. $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ deux événements, montrer que : si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ alors $p_A(B) = p(B)$
   on sait que : $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$ *(cours)*
   si de plus : $p_B(A) = p(A)$
   alors : $p(A \cap B) = p(B) \times p(A)$

3. calculer les probabilités $p(F)$, $p(L)$ et $p(L \cap F)$
   $p(F) = \dfrac{600}{1000} = \boxed{60\%}$ $\quad p(L) = \dfrac{250}{1000} = \boxed{25\%}$

   $p(L \cap F) = \dfrac{150}{1000} = \boxed{15\%}$

   on a : $p(F) \times p(L) = 0,6 \times 0,25 = 0,15 = \boxed{15\%}$

   donc : $\boxed{p(F) \times p(L) = p(L \cap F) \text{ donc } F \text{ et } L \text{ sont indépendants}}$

• déterminer si G et L sont indépendants puis incompatibles
• déterminer si G et F sont indépendants

corrigé activité 2

un dé à 8 faces n'est pas bien équilibré, un échantillonnage a permis d'obtenir le tableau suivant

score X	1	2	3	4	5	6	7	8	total
fréquence	0,05	0,1	0,05	0,2	0,1	0,3	0,1	0,1	1

i. les événements "pair" et "$X \leq 4$" sont-ils indépendants ?
$p(pair) = 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,1 = \boxed{0,7}$
$p_{X \leq 4}(pair) = \dfrac{0,1 + 0,2}{0,7} = \boxed{\dfrac{3}{7}}$
$p(pair) \neq p_{X \leq 4}(pair)$ donc $\boxed{\text{"pair" et "}X \leq 4\text{" ne sont pas indépendants}}$

$\boxed{\text{"pair" et "}X \leq 4\text{" ne sont pas incompatibles}}$
car "2" est "pair" et " inférieur à 4" en même temps

ii. de même pour "$X \geq 4$" et "$X \leq 4$"

3.3 à retenir

propriété 4 : (indépendance)

Soit un univers de probabilité U sur lequel est défini une probabilité p

Soient $A \subset U$ et $B \subset U$ deux événements de U

$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \iff p(A \cap B) = p(A) \times p(B)}$

$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \iff p_B(A) = p(A)}$

$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \iff p_A(B) = p(B)}$

Remarques :

(a) A et B sont incompatibles $\iff A \cap B = \emptyset$

(b) "indépendants" n'est pas équivalent à "incompatibles"

3.4 exercices

exercice 7 :

Une entreprise réalise et commercialise des compositions florales ainsi que des produits pour le jardin. L'entreprise confectionne ses compositions florales avec des bulbes de fleurs qu'elle reçoit en grande quantité. Chaque bulbe peut présenter deux défauts que l'on désigne par défaut a et défaut b.

On prélève un bulbe au hasard dans un stock important.

On note A l'évènement : « le bulbe présente le défaut a » et on note B l'évènement : « le bulbe présente le défaut b ».

On admet que les probabilités des évènements A et B sont $P(A) = 0,015$ et $P(B) = 0,02$.

On suppose que les deux événements A et B sont indépendants

On admettra que si A et B sont indépendants alors A, B, $\overline{A}$ $\overline{B}$ sont indépendants deux à deux

i. Calculer la probabilité de l'évènement E_1 : « le bulbe présente le défaut a et le défaut b ».

ii. Calculer la probabilité de l'évènement E_2 ; « le bulbe présente au moins un des deux défauts ».

iii. Calculer la probabilité de l'évènement E_3 : « le bulbe ne présente aucun des deux défauts ».

exercice 8 : *(D'après sujet bac France Métropolitaine, La Réunion Septembre 2007)*

Jean s'amuse régulièrement sur un terrain de football avec le gardien de but. Chaque partie consiste à tirer successivement deux tirs au but.

Au vu des résultats obtenus au cours de l'année, on admet que :

– la probabilité que Jean réussisse le premier tir au but est égal à $0,8$;

– s'il réussit le premier, alors la probabilité de réussir le second est $0,7$;

– s'il manque le premier, alors la probabilité de réussir le second est $0,5$.

On note R_1 l'évènement : « le premier tir au but est réussi » et $\overline{R_1}$ son évènement contraire, R_2 l'évènement : « le second tir au but est réussi » et $\overline{R_2}$ son évènement contraire.

(a) Représenter la situation par un arbre pondéré.

(b) Calculer la probabilité que les deux tirs au but soient réussis.

(c) i. Calculer la probabilité que le second tir au but soit réussi.

 ii. Les évènements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

(d) On note A l'évènement : « Jean a réussi exactement un tir au but ». Montrer que $p(A) = 0,34$.