Université de Paris-Sud, 11
Faculté des sciences d'Orsay
L3 PIST

Probabilités

TD 2
Probabilités sur des ensembles finis ou dénombrables et variables aléatoires discrétes

Exercice 1

Soit X, Y, Z trois variables suivant chacune une distribution de Bernouilli **independantes** de même paramètre p.

1. Donner en fonction de p la distribution de probabilité de la variable $T = X + Y + Z$.
2. Calculer $\mathbb{E}(T)$ en fonction de p en utilisant deux méthodes différentes.

Exercice 2

1. Question intermédiaire : on sait que $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}$ si $|\alpha| < 1$. Dériver (par rapport à α) $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k$ et en déduire l'expression de $\sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha^{k-1}$.
2. Utiliser ce résultat pour calculer la moyenne d'une variable aléatoire suivant une distribution géométrique de paramètre p.
3. En s'inspirant de la démonstration précédente, calculer la variance d'une variable aléatoire suivant une distribution géométrique de paramètre p.

Exercice 3

On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit $\frac{1}{10}$.

1. On lance 3 fois la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir une seule fois pile ?
2. On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la première fois. Combien effectuera-t-on en moyenne de lancers ?

Exercice 4

Soit X une V.A. de loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$: $P(X = k) = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que $\frac{1}{1+X} \in L^1$ et calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)$.
2. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{(1+X)(2+X)}\right)$ et en déduire $\mathbb{E}\left(\frac{1}{2+X}\right)$.

Exercice 5

Un gardien de nuit doit ouvrir une porte dans le noir, avec n clés dont **une seule** est la bonne. On note X le nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé. Soit l'évenement $A_i =$"On ouvre la porte à l'essai i".

1. On suppose que le gardien essaie les clés une à une sans utiliser deux fois la même. Quelles sont les valeurs que peut prendre X? Pourquoi X ne suit pas une distribution géométrique? En utilisant les évenements A_i calculer les 3 probabilités $P(X=1) = P(A_1)$, $P(X=2) = P(\bar{A}_1 \cap A_2)$ et $P(X=3) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)$. En déduire la distribution de X. Calculer son espérance et sa variance. On rappel que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Lorsque le gardien est ivre, il mélange toutes les clefs à chaque tentative. Quelles sont les valeurs que peut prendre X? Donner la distribution de X, son espérance et sa variance.

3. Application numérique pour $n = 10$ clés. Commenter.

4. Le gardien est ivre un jour sur trois. **Sachant qu'un** jour n tentatives (c'est-à-dire **exactement** le nombre de clé dont dispose le gardien) ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le gardien ait été ivre ce jour là ?

Exercice 6

Donner la formule de la fonction de répartition $F(n)$ d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Tracer cette fonction pour $p = 1/4$.

Exercice 7

On jette 5 dés à six faces non truqués. Après le premier lancer, on reprend et on lance les dés qui n'ont pas donné de six, jusqu'à ce qu'on obtienne 5 six. Soit X le nombre de lancers nécessaires. Soit $X_{i=1,\ldots,5}$ le nombre de lancé nécessaires pour que le $i^{ème}$ dé amène un 6 pour la première fois.

1. Quelle est la distribution des VA X_i ? En utilisant les VA X_i, calculer $P(X \leq k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

2. Question intermédiaire : soit Y une variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrer, en détaillant les termes de la somme, que

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y \geq k). \tag{1}$$

3. Combien de lancers sont nécessaires en moyenne pour obtenir les 5 six ? Ne pas chercher à obtenir une solution exacte (il est néanmoins possible d'en trouver une en développant $(a+b)^5$ ou si on refait l'exercice avec seulement 2 dés et sachant que $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}$ si $|\alpha| < 1$).

Exercice 8

On pose 20 questions à un candidat. Pour chaque question k réponses sont proposées dont une seule est la bonne. Le candidat choisit au hasard une des réponses proposées. On notera $X_{i=1,\ldots,20}$ le résultat de la question $i.X_i = 1$ si la réponse est correct, 0 sinon.

1. On lui attribue un point par bonne réponse. Soit X le nombre de points obtenus. Quelle est la loi de X ? Déterminer k pour que le candidat obtienne en moyenne une note de 5 sur 20.

2. On propose au candidat de donner deux réponses possibles par questions (un premier voeux et un deuxième voeux). On lui attribue alors 1 point si son premier voeux est correct et $\frac{1}{2}$ point si son deuxième voeux est correct. Soit Y le nombre de $\frac{1}{2}$ points obtenus lors de ces seconds choix. Quelle est la loi de Y ? Soit S le nombre total de points obtenus. Déterminer k pour que le candidat obtienne en moyenne une note de 5 sur 20.