Exercices - Variables aléatoires : lois continues : corrigé

Lois classiques

Exercice 1 - Carré de la loi uniforme - *L2/L3/ECS* - ⋆

On calcule la fonction de répartion F_Y de Y. Si $y<0$, on a

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=0.$$

Si $y\geq 0$, alors

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(-\sqrt{y}\leq X\leq \sqrt{y})=P(X\leq\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y}).$$

Connaissant la fonction de répartition de X, on en déduit

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{si } y<a^2\\ 2\frac{\sqrt{y}-a}{b-a} & \text{si } y\in[a^2,b^2]\\ 1 & \text{si } y>b^2.\end{cases}$$

Cette fonction de répartition est dérivable sauf en a^2 et en b^2. La dérivée donne la densité. On en déduit que Y admet une densité p_Y donnée par :

$$p_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{si } y<a^2\\ \frac{1}{2(b-a)\sqrt{y}} & \text{si } y\in[a^2,b^2]\\ 9 & \text{si } y>b^2.\end{cases}$$

Pour calculer l'espérance et la variance de Y, il est préférable de se souvenir que $Y=X^2$. On en déduit :

$$E(Y)=E(X^2)=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)},$$

$$E(Y^2)=E(X^4)=\int_a^b\frac{x^4}{b-a}dx=\frac{b^5-a^5}{5(b-a)},$$

$$\mathrm{Var}(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\frac{4(b-a)^4}{45}.$$

Exercice 2 - Uniforme et exponentielle - *L2/L3/ECS* - ⋆

On va calculer la fonction de répartition de X. On remarque que $X\leq x$ si et seulement si $U\geq\exp(-x)$, puisque la fonction $x\mapsto\exp(-x)$ est décroissante. On a donc

$$F_X(x)=P(X\leq x)=P(U\geq\exp(-x)).$$

Si $x<0$, alors $\exp(-x)>1$ et donc $F_X(x)=0$. Si $x\geq 0$, alors $\exp(-x)\in[0,1]$ et donc, puis U suit une loi uniforme à valeurs dans $[0,1]$,

$$F_X(x)=1-\exp(-x).$$

On reconnait bien la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1 (on peut encore dériver la fonction de répartition pour retomber sur la densité).

Exercice 3 - Lecture de la table de la loi normale - *L2/ECS* - ⋆

1. On note ϕ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On a
$$P(-t<X<t)=\phi(t)-\phi(-t)=\phi(t)-(1-\phi(t))=2\phi(t)-1.$$
Donc $P(-t<X<t)\simeq 0,95 \iff \phi(t)=0,975$ ce qui donne $t\simeq 1,96$.

2. Posons $Y=\frac{X-8}{4}$. Alors Y suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On peut alors répondre aux diverses questions en les formulant à l'aide de Y, et en utilisant la table de la loi normale.
   (a) On a $X<7,5 \iff Y<-0,5/4=-0,125$. On a donc
   $$P(X<7,5)=\phi(-0,125)=1-\phi(0,125).$$
   Puisque $\phi(0,12)\simeq 0,55$ et $\phi(0,13)\simeq 0,55$, on trouve finalement que
   $$P(X<7,5)\simeq 1-0,55=0,45.$$
   (b) On a $X>8,5 \iff Y>0,125$ et donc
   $$P(X>8,5)=P(Y>0,125)=1-\phi(0,125)\simeq 0,45.$$
   (c) On a $6,5<X<10 \iff -0,375<Y<0,5$ et on trouve en raisonnant comme précédemment
   $$P(6,5<X<10)\simeq 0,34.$$
   (d) Il y a une difficulté supplémentaire du fait de l'événement qui est un peu plus compliqué. On résoud cette difficulté en écrivant que :
   $$P(X>6|X>5)=\frac{P((X>6)\cap(X>5))}{P(X>5)}=\frac{P(X>6)}{P(X>5)}.$$
   En renormalisant comme aux questions précédentes, on trouve que
   $$P(X>6|X>5)\simeq 0,89.$$

3. Si X suit la loi $\mathcal{N}(m,\sigma)$, alors $Y=\frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On doit avoir :
$$0,05=P(X<-1)=P\left(Y<\frac{-1-m}{\sigma}\right)=\phi\left(\frac{-1-m}{\sigma}\right)$$
et
$$0,12=P(X>3)=1-P\left(Y\leq\frac{3-m}{\sigma}\right)=1-\phi\left(\frac{3-m}{\sigma}\right).$$
Or, $0,05=1-0,95=\simeq\phi(-1,645)$ et $0,12\simeq\phi(-1,175)$. On doit donc avoir
$$\begin{cases}\frac{-1-m}{\sigma} &= -1,645\\ \frac{m-3}{\sigma} &= -1,175.\end{cases}$$
On résoud le système et on trouve que
$$\begin{cases} m &\simeq 1,33\\ \sigma &\simeq 1,41.\end{cases}$$

Exercice 4 - Somme - *L2/ECS* - $\star$

Notons X_i la variable aléatoire correspondant à la quantité commandée par la i-ème cantine. X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes, suivent des lois normales, avec $X_1 \sim \mathcal{N}(55,4)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(65,10)$ et $X_3 \sim \mathcal{N}(30,3)$. Notons Y la quantité totale commandée au grossiste, $Y = X_1 + X_2 + X_3$. Alors Y suit une loi normale, d'espérance la somme des espérances et de variance la somme des variances. Autrement dit, Y suit une loi $\mathcal{N}(150,\sqrt{125})$. Notons A la quantité de viande dont il doit disposer pour que le risque de ne pouvoir satisfaire la demande soit inférieure à 0,05. On a donc $P(Y>A)\leq 0,05$. Pour déterminer A vérifiant cette propriété, on va renormaliser Y et s'aider d'une table de la loi normale centrée réduite. Posons en effet $Z=\frac{Y-150}{\sqrt{125}}$. Alors Y suit une loi normale centrée réduite. De plus,

$$Y>A \iff \sqrt{125}Z+150>A \iff Z>\frac{A-150}{\sqrt{125}}.$$

Or, une lecture de la table de la loi normale indique que

$$P(Z>1,65)<0,05.$$

Ainsi, il suffit que

$$A\geq 1,65\times\sqrt{125}+150\simeq 168,4.$$

Le grossiste doit donc disposer d'environ $168,4$ kg de viande.

Exercice 5 - Un équivalent de la queue de la gaussienne - *L3* - $\star\star$

1. Ou bien on connait très bien son cours, et dans ce cas on sait que si $f(x)=o(g(x))$ au voisinage de $+\infty$, et si l'intégrale $\int_a^{+\infty}g(t)dt$ converge, alors
$$\int_x^{+\infty}f(t)dt =_{+\infty} o\left(\int_x^{+\infty}g(t)dt\right).$$
Ce résultat s'applique immédiatement ici. Ou bien on ne connait pas ce résultat, et on le redémontre dans le cas qui nous intéresse. Ici, il est clair que
$$\frac{1}{t^2}e^{-t^2/2} =_{+\infty} o\left(e^{-t^2/2}\right).$$
Fixons $\varepsilon>0$. Il existe donc $a>0$ tel que, pour tout $t\geq a$, on a
$$0\leq \frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}\leq \varepsilon e^{t^2/2}.$$
Par intégration, pour tout $x\geq a$, on a
$$0\leq G(x)\leq \varepsilon F(x).$$
C'est bien que $G(x)=_{+\infty}o(F(x))$.
2. On a $P(X>x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(x)$. On va déterminer un équivalent en intégrant par parties. En effet
$$\begin{aligned}F(x) &= \int_x^{+\infty}\frac{1}{t}te^{-t^2/2}dt\\ &= \left[-\frac{1}{t}e^{-t^2/2}\right]_x^{+\infty}-\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}dt\\ &= \frac{1}{x}e^{-x^2/2}-G(x).\end{aligned}$$

Comme G est négligeable devant F au voisinage de $+\infty$, on en déduit que

$$P(X > x) \sim_{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}x}.$$

Exercice 6 - Variable aléatoire sans mémoire - *L2/L3/ECS* - ⋆⋆

1. Il s'agit simplement de calculer la fonction de répartition d'une loi exponentielle. Mais, par intégration,
$$P(T > t) = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda t},$$
ce qui entraîne facilement que T est sans mémoire.
2. (a) On va prouver par récurrence sur n que $P(T > t/2^n) = 0$. C'est vrai pour $n = 0$ et si c'est vrai au rang n, alors
$$P(T > (t/2^{n+1} + t/2^{n+1})) = P(T > t/2^{n+1})P(T > t/2^{n+1})$$
ce qui implique
$$P(T > t/2^n) = \big(P(T > t/2^{n+1})\big)^2,$$
ce qui prouve que $P(T > 2^{n+1}) = 0$. Mais alors, la suite d'événements (A_n) définie par $A_n = T > t/2^n$ est une suite croissante d'événements, et $\bigcup_n A_n = (T > 0)$. On en déduit que
$$P(T > 0) = \lim_{n\to+\infty} P(T > t/2^n) = 0,$$
ce qui contredit l'hypothèse faite sur T. On a donc $P(T > t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.

   (b) On commence par prouver par récurrence sur n entier non-nul que $P(T > n) = \alpha^n$. C'est vrai pour $n = 1$, et si c'est vrai au rang n, alors
$$P(T > n + 1) = P(T > n)P(T > 1) = \alpha^n\alpha = \alpha^{n+1}.$$
Soit maintenant $t = p/q$ appartenant à $\mathbb{Q}_+^*$, avec p, q des entiers strictement positifs. On a alors :
$$\begin{aligned} P(T > p) &= P(T > p/q + \cdots + p/q) \quad \text{(avec } q \text{ termes dans la somme)} \\ &= P(T > p/q)P(T/p/q + \cdots + p/q) \quad \text{(avec } q-1 \text{ termes dans la somme)} \\ &= \big(P(T > p/q)\big)^q \end{aligned}$$
soit
$$P(T > p/q) = \big(P(T > p)\big)^{1/q} = \alpha^{p/q}.$$
Soit finalement $t \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe deux suites de rationnels (x_n) et (y_n) avec $x_n \leq t \leq y_n$ pour tout n et les suites (x_n), (y_n) convergent vers α. On a de plus
$$\alpha^{y_n} = P(T > y_n) \leq P(T > t) \leq P(T > x_n) = \alpha^{x_n}.$$
On passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ et on trouve
$$\alpha^t \leq P(T > t) \leq \alpha^t$$
ce qui donne le résultat voulu.

(c) La fonction de répartition de T est définie, pour $t > 0$, par
$$F_T(t) = 1 - P(T > t) = 1 - \alpha^t.$$
La fonction de répartition est dérivable sur $]0, +\infty[$, on retrouve la densité de T en la dérivant. Or, la dérivée de $t \mapsto 1 - \alpha^t$ est $t \mapsto -\ln \alpha \alpha^t = -\ln \alpha \exp(t \ln \alpha)$. C'est bien la densité d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda = -\ln \alpha > 0$.

3. On a
$$P(T > t + s | T > s) = \frac{P(T > t + s \cap T > s)}{P(T > s)} = \frac{P(T > t + s)}{P(T > s)} = P(T > t).$$
Si T modélise la durée de vie d'un composant, elle modélise une durée de vie "sans vieillissement". Si le composant a déjà vécu s minutes, il vivra t minutes de plus avec la même probabilité qu'un composant neuf vive au moins t minutes.

Exercice 7 - Minimum de deux lois exponentielles - *L2* - ⋆⋆

1. On va commencer par calculer $P(X_1 > y)$. Si $y \leq 0$, alors $P(X_1 > y) = 1$ (car X_1 est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$). Sinon, pour $y > 0$, on a
$$P(X_1 > y) = \int_y^{+\infty} \frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 y} dy = e^{-\lambda_1 y}.$$
De même,
$$P(X_2 > y) = e^{-\lambda_2 y}.$$
Y est à valeurs positives, donc $P(Y > y) = 1$ si $y \leq 0$. Si $y > 0$, alors
$$P(Y > y) = P(X_1 > y \cap X_2 > y) = P(X_1 > y)P(X_2 > y) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y},$$
où on a utilisé l'indépendance de X_1 et X_2. Ainsi, la fonction de répartition de Y, notée $F_Y(y)$, vaut 0 si $y \leq 0$ et $1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y}$ si $y > 0$. On reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, on en déduit que Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
2. On cherche $E(Y)$, avec $\lambda_1 = 1/20$ et $\lambda_2 = 1/30$. L'espérance de Y est donc
$$E(Y) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{60}{5} = 12.$$
3. Si on pose $X = \max(Y_1, Y_2)$, on cherche l'espérance de X. Il serait possible de procéder comme précédemment, en cherchant la fonction de répartition de X (attention, X ne suit pas une loi exponentielle). Mais comme on cherche son espérance, il y a un raisonnement plus facile. En effet, il est facile de remarquer que
$$X_1 + X_2 = X + Y$$
(la somme de deux nombres est égale à la somme de leur minimum et de leur maximum). Prenant l'espérance, on trouve
$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) - E(Y) = 20 + 30 - 12 = 38.$$

Exercice 8 - Lien entre lois exponentielles et lois géométriques - *L2* - ⋆⋆

1. Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. De plus, on a $Y = n \iff n-1 < X \leq n$. Ainsi,
$$P(Y=n) = F_X(n) - F_X(n-1) = (1-e^{-n}) - (1-e^{-(n-1)}) = (1-e^{-1})e^{-n}.$$
On en déduit que Y suit une loi géométrique de paramètre $1-1/e$.
2. Z est à valeurs dans $[0,1[$. Si on note F_Z sa fonction de répartition, elle est nulle à gauche de 0, et égale à 1 à droite de 1. Si $t \in [0,1[$, alors on a $Z \leq t$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-t \leq X \leq n$. Ainsi,
$$P(Z \leq t) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{n-t \leq X \leq n\}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(n-t \leq X \leq n),$$
puisque les événements $n-t \leq X \leq n$ sont disjoints. On en déduit
$$P(Z \leq t) = \sum_{n \geq 1}\left(-e^{-n} + e^{-n-t}\right) = \sum_{n\geq 1}(e^t-1)e^{-n} = \frac{e^t-1}{e-1},$$
car on a reconnu une somme géométrique.
3. Il suffit de dériver :
$$f(t) = F_Z'(t) = \frac{e^t}{e-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(t).$$

Exercice 9 - Uniforme et binomiale - *L2/L3/ECS* - ⋆⋆⋆

1. On va calculer la fonction de répartion F_k de U_k. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$P(U_k > x) = P\left(\cap_{i=0}^k X_i > x\right) = \prod_{i=0}^k P(X_i > x),$$
car les variables aléatoires sont indépendantes. On en déduit :
$$F_k(x) = P(U_k \leq x) = 1 - P(U_k > x) = 1 - \prod_{i=0}^k \left(1 - P(X_i \leq x)\right).$$
Connaissant la loi des X_i, on en déduit :
$$F_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^{k+1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$
La fonction F_k est C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. On en déduit que U_k admet une densité g_k donnée par la dérivée de F_k,
$$g_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ (k+1)(1-x)^k & \text{si } x \in [0,1]. \end{cases}$$

2. On procède de la même façon, en utilisant la formule des probabilités totales. On obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(U \leq x) &= \sum_{k=0}^{n} P(N=k)P(U \leq x | N=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(N=k)P(U_k \leq x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}(1-(1-x)^{k+1}). \end{aligned}$$

La fonction de répartition est C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. On en déduit que U admet une densité g donnée par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}(k+1)(1-u)^k & \text{si } u \in [0,1]. \end{cases}$$

Autres lois

Exercice 10 - Exponentiel des deux côtés ! - *Oral ESCP* - $\star$

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, positive si $a \geq 0$, et on a :

$$\int_0^{+\infty} 3^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x\ln 3} dx = \frac{1}{\ln 3},$$

$$\int_{-\infty}^{0} 3^x dx = \frac{1}{\ln 3}.$$

Ainsi, f est une densité de probabilité si et seulement si $a = \frac{\ln 3}{2}$.

2. Si $x \leq 0$, on a :

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln 3 \int_{-\infty}^{x} e^{t\ln 3} dt = \frac{3^x}{2}.$$

Si $x \geq 0$, on a :

$$F(x) = F(0) + \int_0^x e^{-t\ln 3} dt = 1 - \frac{3^{-x}}{2}.$$

La fonction $xf(x)$ est négligeable au voisinage de $+\infty$ devant la fonction $1/x^2$, et il en est de même au voisinage de $-\infty$ car cette fonction est impaire. Elle est donc intégrable, et X admet bien une espérance. En outre, toujours par imparité de $x \mapsto xf(x)$, l'espérance est nulle !

3. Y prend ses valeurs dans R^+, et on a :

$$P(Y \leq x) = P(3^X \leq x) = P\left(X \leq \frac{\ln x}{\ln 3}\right).$$

On en déduit : si $0 \leq x \leq 1$,

$$F_Y(x) = \frac{1}{2} 3^{\frac{\ln x}{\ln 3}} = \frac{x}{2}.$$

Si $x > 1$, on a :
$$F_Y(x) = 1 - \frac{1}{2}3^{-\frac{\ln x}{\ln 3}} = 1 - \frac{1}{2x}.$$
En particulier, pour $x > 1$, la densité de Y est :
$$f_Y(x) = F'_Y(x) = \frac{1}{2x^2}.$$
Au voisinage de $+\infty$, on a :
$$xf(x) \sim \frac{1}{2x},$$
fonction qui n'est pas intégrable. Y n'admet pas d'espérance.

Exercice 11 - Loi de Laplace - *L2* - $\star$

1. Pour que f soit une densité, il faut que $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$. On calcule l'intégrale en séparant $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ et on trouve $c = 1/2$.
2. On a, pour tout $n \geq 1$, $x^n e^{-|x|} = o(x^{-2})$ en $\pm\infty$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale. Par imparité de la fonction $x \mapsto x^n e^{-|x|}$ si n est impair, les moments d'ordre impair sont nuls. Les moments d'ordre pair sont calculés par récurrence. En effet, pour $n = 2p$, posons $I_p = \int_0^{+\infty} x^{2p}e^{-x}dx$, de sorte que $E(X^{2p}) = I_p$. Alors, en intégrant par parties (deux fois), on trouve
$$I_p = \int_0^{+\infty} 2px^{2p-1}e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} 2p(2p-1)x^{2p-2}e^{-x}dx = 2p(2p-1)I_{p-1}.$$
On en déduit immédiatement que $I_p = (2p)!I_0$, et il est aisé de voir que $I_0 = 1$. En conclusion, on a $E(X^{2p}) = (2p)!$.

Exercice 12 - Loi log-normale - *L2* - $\star\star$

1. $X = e^Y$ ne prend ses valeurs que dans $[0, +\infty[$. On en déduit que $F_X(x) = 0$ si $x \leq 0$. Pour $x > 0$, on a $X \leq x \iff Y \leq \ln x$ et donc $F_X(x) = \phi(\ln x)$.
2. Il suffit de dériver, et on trouve
$$f_X(x) = \frac{1}{x}\phi'(\ln x)\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\ln^2 x}{2}}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x).$$
3. Plutôt que d'utiliser la densité, on va utiliser le théorème de transfert et écrire
$$E(X) = E(e^Y) = \int_{\mathbb{R}} e^y \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dy = \sqrt{e}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(y-1)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dy.$$
Après changement de variables $u = y - 1$, on reconnait $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2}$ qui vaut $\sqrt{2\pi}$. D'où le résultat.

Exercice 13 - Etude d'une densité - *Oral ESCP* - $\star\star$

1. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue, positive. Il suffit de prouver que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Remarquons que $x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$ est une primitive de f. Donc :
$$\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{1+e^{-b}} - \frac{1}{1+e^{-a}}.$$
Faisant tendre b vers $+\infty$ et a vers $-\infty$, on trouve que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. f est bien une densité de probabilité.
2. La fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable, et vérifie $\varphi'(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} > 0$. En outre, $\lim x \to -\infty\varphi(x) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +1$: φ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. Pour calculer φ^{-1}, il faut résoudre l'équation suivante :
$$y = \frac{e^x-1}{e^x+1} \iff e^x = \frac{1+y}{1-y},$$
et donc pour tout $y \in]-1,1[$, on a :
$$\varphi^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$
3. Y prend ses valeurs dans $]-1,1[$, et, pour tout x de $]-1,1[$:
$$\begin{aligned} P(Y\leq x) &= P(\varphi(X)\leq x) = P(X\leq \varphi^{-1}(x)) \\ &= P\left(X\leq \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) \\ &= \frac{1}{1+\exp\left(-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)} \\ &= \frac{x+1}{2}. \end{aligned}$$
Ainsi,
$$Y \hookrightarrow \mathcal{U}(]-1,1[).$$

Exercice 14 - Entropie - *L2* - ⋆⋆⋆

1. C'est très classique. On utilise la concavité ou bien on fait une étude de fonctions.
2. Puisque $f(x) = 0$ ou 1, l'entropie d'une variable aléatoire uniforme est nulle.
3. On a
$$\begin{aligned} h(X) &= -\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ln\left(\frac{e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)dx \\ &= \frac{\ln(2\pi\sigma^2)}{2}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}dx + \frac{1}{2\sigma^2}\int_{\mathbb{R}}(x-m)^2\frac{e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}dx \\ &= \frac{\ln(2\pi\sigma^2)}{2} + \frac{1}{2\sigma^2}E(X^2) \\ &= \frac{\ln(2\pi\sigma^2)}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. La vérification est immédiate. Remarquons que la deuxième intégrale est convergente car Y admet un moment d'ordre 2.
5. La première intégrale se traite à l'aide du résultat de la première question. En effet, on a
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\ln\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx \leq \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\frac{\varphi(x)}{f(x)}-1\right)dx = \int_{\mathbb{R}}(\varphi(x)-f(x))dx = 0.$$
La seconde se calcule, exactement comme à la question 3. En effet,
$$-\int_{\mathbb{R}} f(x)\ln\varphi(x)dx = \frac{\ln 2\pi\sigma^2}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)dx + \frac{1}{2\sigma^2}\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\left(1+\ln(2\pi\sigma^2)\right).$$

Exercices pratiques

Exercice 15 - Tailles - *L2* - ⋆

Comme usuellement, on note ϕ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On note aussi $Y = \frac{X-185}{6}$, qui suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. On cherche $P(X > 185)$ qu'on va calculer en renormalisant la loi normale :
$$P(X>185) = P\left(\frac{X-185}{6} > \frac{185-175}{6}\right) = P(Y > 5/3) = 1-\phi(5/3) \simeq 0,05.$$
2. C'est le même raisonnement, si ce n'est qu'il fait de plus intervenir une probabilité conditionnelle :
$$P(X>192|X>180) = \frac{P(X>192\cap X>180)}{P(X>180)} = \frac{P(X>192)}{P(X>180)}.$$
On mène les calculs comme précédemment, et on trouve
$$P(X>192|X>180) = \frac{1-\phi(17/6)}{1-\phi(5/6)} \simeq 0,01.$$

Exercice 16 - Chaîne de fabrication - *Concours Ecricome* - ⋆

1. Une densité de M est : $v(t) = 0$ sur $\mathbb{R}^-$ et $v(t) = 2e^{-2t}$ sur $\mathbb{R}^+$ une densité de N est : $w(t) = 1$ sur $[0,1]$ et 0 ailleurs
2. Le temps total de fabrication est la somme des temps de passage sur A et B. On a donc $S = N + M$. On en déduit que le temps moyen de fabrication d'une pièce est : $E(S) = E(M) + E(N) = \frac{1}{2} + \frac{1-0}{2} = 1$.

Exercice 17 - Pannes - *L2/L3/ECS* - ⋆⋆

1. La durée moyenne de fonctionnement entre deux pannes consécutives est l'espérance (commune) des variables aléatoires X_1, X_2 et X_3, c'est-à-dire $1/(1/2) = 2$.

2. L'événement E s'écrit : $E=(X_1\geq 2)\cap(X_2\geq 2)\cap(X_3\geq 2)$. Les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 étant indépendantes, on a $P(E)=P(X_1\geq 2)\times P(X_2\geq 2)\times P(X_3\geq 2)$. Or,
$$P(X_i\geq 2)=\int_2^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-t/2}dt=e^{-1}.$$
On en conclut que $P(E)=e^{-3}$.
3. (a) On a $Y=\max(X_1,X_2,X_3)$. Ainsi, $(Y\leq t)=(X_1\leq t)\cap(X_2\leq t)\cap(X_3\leq t)$. Par indépendance des 3 variables aléatoires, on en déduit que
$$P(Y\leq t)=P(X_1\leq t)P(X_2\leq t)P(X_3\leq t).$$
Ainsi, si $t\leq 0$, $P(Y\leq t)=0$. Si $t>0$, alors
$$P(Y\leq t)=\left(1-e^{-t/2}\right)^3.$$
(b) La quantité calculée à la question précédente est la fonction de répartition de Y, nous la notons F_Y. Alors F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$. On en déduit que Y admet une densité notée f_Y définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f_Y(t)=F_Y'(t)$, soit
$$f_Y(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ \frac{3}{2}e^{-t/2}\left(1-e^{-t/2}\right)^2 & \text{si } t>0.\end{cases}$$
(c) A l'aide d'une intégration par parties, on trouve que
$$\begin{aligned}\int_0^x te^{at}dt &= \left[\frac{te^{at}}{a}\right]_0^x-\int_0^x\frac{e^{at}}{a}dt\\ &= \frac{x}{a}e^{ax}-\frac{1}{a}\left[\frac{e^{ax}}{a}\right]_0^x=\frac{x}{a}e^{ax}-\frac{e^{ax}}{a^2}+\frac{1}{a^2}.\end{aligned}$$
Faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve finalement que
$$\int_0^{+\infty}te^{-at}dt=\frac{1}{a^2}.$$
(d) Nous allons prouver que $\int_0^x tf_Y(t)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$. Mais, pour tout $x>0$,
$$\begin{aligned}\int_0^x tf_Y(t)dt &= \int_0^x\frac{3}{2}te^{-t/2}(1-e^{-t/2})^3dt\\ &= \frac{3}{2}\int_0^x(te^{-t/2}-2te^{-t}+te^{-3t/2})dt\end{aligned}$$
Faisant tendre x vers $+\infty$ et utilisant la question précédente, on obtient que l'intégrale $\int_0^{+\infty}tf_Y(t)dt$ converge, et vaut
$$E(Y)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{(-1/2)^2}-\frac{1}{(-1)^2}+\frac{1}{(-3/2)^2}\right)=\frac{11}{3}.$$
La durée maximale moyenne de fonctionnement entre deux pannes est 3h40min.

Exercice 18 - La station-service - *L2* - ⋆

1. f doit être une densité de probabilité, et donc on doit avoir
$$\int_0^1 f(x)dx = 1.$$
Or,
$$\int_0^1 f(x)dx = c\left[-\frac{(1-x)^5}{5}\right]_0^1 = \frac{c}{5}.$$
On a donc $c = 5$.
2. On va commencer par chercher la fonction de répartition $F_X(x)$ de X. Elle est nulle à gauche de 0, égale à 1 à droite de 1, et si $x \in [0,1]$, on a
$$F_X(x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - (1-x)^5.$$
On cherche alors x tel que la probabilité de consommer plus de x milliers de litre dans la semaine soit inférieure à 10^{-5}. Autrement dit, on cherche x le plus petit possible tel que $F_X(x) > 1 - 10^{-5}$. Ceci est équivalent à
$$(1-x)^5 \leq 10^{-5} \iff 1 - x \leq 10^{-1} \iff x \geq 0,9.$$
Le réservoir doit contenir au moins 900 litres.