TD7. Vecteurs aléatoires.

1. Soient $\alpha, \beta \in]0,1[$ deux réels. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on pose $p_{i,j} = \alpha\beta(1-\alpha)^i(1-\beta)^j$.

a) Montrer qu'en posant $\mathbb{P}(\{(i,j)\}) = p_{ij}$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on définit une mesure de probabilités sur $\mathbb{N}^2$ muni de la tribu $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$.
Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on pose $X((i,j)) = i$ et $Y((i,j)) = j$.

b) Déterminer la loi de X et la loi de Y.

c) Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$, $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X > Y)$.

Solution de l'exercice 1.

a) Il s'agit de vérifier que $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $p_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} p_{i,j} = 1$. La positivité des $p_{i,j}$ est évidente d'après leur définition. Comme $\alpha, \beta \in]0,1[$, on peut utiliser la somme d'une série géométrique : $\sum_{i\in\mathbb{N}} x^i = 1/(1-x)$ avec $x = 1-\alpha$ et $x = 1-\beta$, on obtient :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} p_{i,j} = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha\beta(1-\alpha)^i(1-\beta)^j = \alpha\beta\Big(\sum_{i\in\mathbb{N}}(1-\alpha)^i\Big)\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}}(1-\beta)^j\Big) = 1.$$

b) Remarquons que la loi jointe du vecteur (X,Y) est $p_{i,j}$. En effet,

$$\mathbb{P}[X=i, Y=j] = \mathbb{P}[\{(i',j') \in \mathbb{N}^2 \,:\, X((i',j')) = i,\, Y((i',j')) = j\}] = \mathbb{P}[\{(i,j)\}] = p.$$

D'après le cours (formule des probabilités totales), la loi marginale de X est donnée par :

$$\forall\, i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}[X=i] = \sum_{j\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}[X=i, Y=j] = \alpha(1-\alpha)^i \sum_{j\in\mathbb{N}} \beta(1-\beta)^j = \alpha(1-\alpha)^i.$$

Ainsi, X suit une loi géométrique de paramètre $1-\alpha$. De même, $\mathbb{P}(Y=j) = \beta(1-\beta)^j$, autrement dit Y suit une loi géométrique de paramètre $1-\beta$.

c)

$$\mathbb{P}[X<Y] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X<Y\}}] = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \mathbb{1}_{\{i<j\}}\mathbb{P}[X=i,Y=j] = \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2\\ i<j}} p_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty} p_{i,j}.$$

Comme pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=i+1}^{\infty} \beta(1-\beta)^j = (1-\beta)^{i+1}$, cela donne

$$\mathbb{P}[X < Y] = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^i (1-\beta)^{i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha(1-\beta)\left((1-\alpha)(1-\beta)\right)^i$$
$$= \frac{\alpha(1-\beta)}{1-(1-\alpha)(1-\beta)} = \frac{\alpha - \alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}.$$

De même (en échangeant les rôles de X et Y, donc de α et β), on obtient

$$\mathbb{P}[X > Y] = \frac{\beta - \alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}.$$

On peut calculer $\mathbb{P}[X = Y]$ directement en sommant les $p_{i,i}$, ou alors on peut utiliser le fait que les parties $\{X = Y\}$, $\{X < Y\}$ et $\{X > Y\}$ forment une partition de $\mathbb{N}^2$ et les résultats précédents :

$$\mathbb{P}[X = Y] = 1 - \mathbb{P}[X > Y] - \mathbb{P}[X < Y] = \frac{\alpha+\beta-\alpha\beta-(\beta-\alpha\beta)-(\alpha-\alpha\beta)}{\alpha+\beta-\alpha\beta} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}.$$

2. On note N la variable aléatoire comptant le nombre d'oeufs qu'un insecte donné pond. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^+$. On suppose également que chaque oeuf donne naissance à un nouvel insecte avec probabilité p, indépendamment de l'éclosion des autres oeufs. On considère alors une famille $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. On suppose que les variables aléatoires $(N, X_1, X_2, ...)$ sont indépendantes et on note D le nombre de descendants de l'insecte.

a) Ecrire D en fonction des variables aléatoires N et X_i

b) Pour tout $(n,d) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}(D = d|N = n)$.

c) En déduire la loi de D et la loi de la variable aléatoire de $\mathbb{N}^2$ $Z = (D, N)$.

d) Retrouver la loi de D en calculant la fonction génératrice de cette variable aléatoire.

Solution de l'exercice 2.

a) On a $D = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (l'indice de la somme est lui même aléatoire)

b) On a :

$$\mathbb{P}[D = d|N = n] = \mathbb{P}\Big[\sum_{i=1}^{N} X_i = d|N = n\Big] = \mathbb{P}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i = d|N = n\Big] = \mathbb{P}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i = d\Big],$$

par indépendance de $(N, X_1, X_2, \dots)$.

La variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} X_i$ somme de n Bernoullis indépendantes de paramètre p, suit une loi binomiale de paramètres n et p, d'où

$$\mathbb{P}[D = d|N = n] = \binom{n}{d} p^d (1-p)^{n-d},$$

pour $d \leq n$, et on a bien sûr $\mathbb{P}(D = d|N = n) = 0$ si $d > n$ (le nombre de descendants ne peut être supérieur au nombre d'œufs).

c) La variable aléatoire $Z = (D, N)$ est à valeurs de $\mathbb{N}^2$. Sa loi est donnée par les valeurs des probabilités $\mathbb{P}\left[\{D=d\} \cap \{N=n\}\right]$, $d \leq n$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\{D=d\} \cap \{N=n\}] &= \mathbb{P}\left[D=d|N=n\right]\mathbb{P}[N=n] \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{d}p^d(1-p)^{n-d}\mathbb{1}_{\{d\leq n\}}.\end{aligned}$$

Pour obtenir la loi de D, on écrit avec la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[D=d] &= \sum_{n\geq 0} = \mathbb{P}[\{D=d\} \cap \{N=n\}] = \sum_{n\geq d} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{d}p^d(1-p)^{n-d} \\ &= \frac{(\lambda p)^d}{d!}e^{-\lambda}\sum_{n\geq d}\frac{\lambda^{n-d}(1-p)^{n-d}}{(n-d)!} = e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^d}{d!}\end{aligned}$$

On reconnaît la loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

d) On peut retrouver ce résultat en utilisant une fonction génératrice. On se rappelle que la fonction génératrice d'une loi de Bernoulli de paramètre p est $1-p+ps$ et cette d'une loi de Poisson de paramètre μ est $e^{\mu(s-1)}$. On écrit :

$$\begin{aligned}G_D(s) &= \mathbb{E}\left[s^D\right] = \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^N X_i}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} s^{\sum_{i=1}^N X_i}\mathbb{1}_{(N=n)}\right] \\ &\underset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^n X_i}\mathbb{1}_{(N=n)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^n X_i}\right]\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{(N=n)}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[s^{X_i}\right]\mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-p+ps)^n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \\ &= e^{p\lambda(s-1)}\end{aligned}$$

On reconnait la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$, et comme la fonction génératrice caractérise la loi, D suit $\mathcal{P}(p\lambda)$. Les arguments utilisés dans le calcul ci-dessus sont l'indépendance des variables aléatoires (qui induit la multiplication des espérances), le fait que l'espérance de l'indicatrice d'une événement soit la probabilité de celui-ci, et une interversion série/espérance en (*) justifiée par le théorème de convergence monotone (les variables aléatoires qui interviennent dans la série sont positives).

3. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^2$ dont la loi admet la densité

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Déterminer les lois de X, Y, $X+Y$, X^2+Y^2.

Solution de l'exercice 3. La loi de X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et admet la densité

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La loi de X est donc la loi normale centrée réduite. La loi de Y est égale à celle de X.

Pour calculer la loi de $X+Y$, considérons une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée. Calculons $\mathbb{E}[g(X+Y)]$:

$$\mathbb{E}[g(X+Y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(x+y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dxdy.$$

Faisons le changement de variable $(u,v) = (x+y, x-y)$, c'est-à-dire $(x,y) = \frac{1}{2}(u+v, u-v)$. Le jacobien $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ est donné par

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

On a $x^2+y^2 = \frac{1}{2}(u^2+v^2)$, donc

$$\mathbb{E}[g(X+Y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(u) e^{-\frac{u^2+v^2}{4}} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(u) e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}\, dudv.$$

On peut intégrer par rapport à v en utilisant la relation $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{v^2}{4}}\, dv = 2\sqrt{\pi}$, et on trouve

$$\mathbb{E}[g(X+Y)] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(u) e^{-\frac{u^2}{4}}\, du,$$

donc $X+Y$ suit la loi normale centrée de variance 2 : on écrit $X+Y \sim \mathcal{N}(0,2)$. On observe qu'on a également $X-Y \sim \mathcal{N}(0,2)$.

Déterminons enfin la loi de X^2+Y^2. On procède de la même manière que pour déterminer la loi de $X+Y$. On fait cependant un autre changement de variables : on passe en coordonnée polaires, écrivant $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. L'application qui à (r,θ) associe (x,y) est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dont le jacobien vaut

$$\left| \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \right| = r.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X^2+Y^2)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(x^2+y^2) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dxdy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+^*} dr \int_0^{2\pi} d\theta g(r^2) r e^{-\frac{r^2}{2}} \\ &= \int_0^{+\infty} g(r^2) e^{-\frac{r^2}{2}}\, rdr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} g(t) e^{-\frac{t}{2}}\, dt, \end{aligned}$$

où nous sommes passés de l'avant-dernière ligne à la dernière en faisant le changement de variable $t = r^2$. On reconnaît la densité de la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. Ainsi, $X^2 + Y^2 \sim \mathcal{E}(\frac{1}{2})$.

4. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de densité $f_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x, y)$. Déterminer les lois de X, Y et $Z = XY$.

Solution de l'exercice 4. Puisque le vecteur aléatoire (X, Y) admet une densité, chacune des variables X et Y admettent une densité, qu'on peut calculer respectivement par les formules $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dy$ et $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dx$. On trouve

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x, y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)dy = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\int_0^1 dy = \mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

Ainsi, X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Le même calcul en échangeant x et y montre que Y suit également la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

Pour calculer la loi de Z, considérons une fonction mesurable bornée $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et calculons, grâce au théorème de transfert, l'espérance de $g(Z)$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(Z)] &= \mathbb{E}[g(XY)]\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g(xy) f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy\\ &= \int_{[0,1]^2} g(xy)\, dxdy.\end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale, on effectue un changement de variables. On pose $t = xy$ et on cherche une autre variable u qui dépende de x et de y et telle que l'application $(x, y) \mapsto (t(x, y), u(x, y))$ soit bijective, de classe C^1 et admette une réciproque de classe C^1. Posons $u(x, y) = x$. On peut retrouver x et y à partir de t et u puisque $x = u$ et $y = \frac{t}{u}$. Notons que nous devons nous restreindre à $(x, y) \in]0, 1] \times [0, 1]$ pour assurer que u ne soit pas nul, mais cela nous suffit puisque c'est, à un ensemble négligeable près, le domaine sur lequel nous intégrons.

Déterminons le domaine dans lequel (t, u) varie lorsque (x, y) décrit $]0, 1[^2$ (considérer ce domaine encore un peu plus petit ne change rien à l'intégrale et simplifie le calcul du domaine de (t, u)). On a $u = x \in]0, 1[$ et $t = xy \in]0, x[=]0, u[$. Ainsi, $(t, u) \in D = \{(a, b) \in]0, 1[^2 \colon a < b\}$. De plus, pour tout (t, u) dans le domaine D, le couple $(x(t, u), y(t, u)) = (u, \frac{t}{u})$ appartient à $]0, 1[^2$.

Calculons, pour tout $(t, u) \in D$, le jacobien de la transformation $(t, u) \mapsto (x(t, u), y(t, u))$. Il vaut

$$\frac{D(x, y)}{D(t, u)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{u} & -\frac{t}{u^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{u}.$$

Nous pouvons maintenant effectuer le changement de variables dans l'intégrale, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(Z)] &= \int_{[0,1]^2} g(xy)\,dxdy \\
&= \int_D g(t)\left|\frac{D(x,y)}{D(t,u)}\right|\,dtdu \\
&= \int_D g(t)\frac{1}{u}\,dtdu \\
&= \int_0^1\int_0^1 g(t)\frac{1}{u}\mathbb{1}_{t<u}\,dtdu \\
&= \int_0^1 g(t)\left(\int_0^1 \frac{1}{u}\mathbb{1}_{t<u}\,du\right)\,dt \\
&= \int_0^1 g(t)\left(\int_t^1 \frac{1}{u}\,du\right)\,dt \\
&= \int_0^1 g(t)(-\log t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\underbrace{(-\log t)\mathbb{1}_{[0,1]}(t)}_{\text{Densité de la loi de } Z}\,dt.
\end{aligned}$$

La variable aléatoire $Z = XY$ a donc une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité $f_Z(t) = (-\log t)\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$.

5.

a) Soient $\theta > 0$ un nombre réel et $k, l \geq 1$ deux nombres entiers. Déterminer l'unique réel c tel que la fonction

$$f_{(X,Y)}(x,y) = cx^{k-1}y^{l-1}e^{-\theta(x+y)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}(x,y)$$

soit la densité d'une mesure de probabilités sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer la loi de X. *Cette loi s'appelle la loi Gamma de paramètres θ et k : on écrit $X \sim \Gamma(\theta,k)$.* Quelle est cette loi lorsque $k = 1$?

b) Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi admet la densité décrite à la question précédente. Déterminer la loi de $X+Y$.

Solution de l'exercice 5.

a) S'il existe, ce réel c est l'unique réel tel que la fonction $f_{(X,Y)}$ soit positive et telle que son intégrale sur $\mathbb{R}^2$ par rapport à la mesure de Lebesgue vaille 1. N'importe quel c positif rend la fonction $f_{(X,Y)}$ positive. Pour que son intégrale vaille 1, il faut que

$$1 = \int_{(\mathbb{R}^+)^2} c x^{k-1} y^{l-1} e^{-\theta(x+y)}\, dxdy = c \int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-\theta x}\, dx \int_0^{+\infty} y^{l-1} e^{-\theta y}\, dy.$$

On vérifie aisément, par récurrence sur $n \geq 0$ et en utilisant une intégration par parties pour passer d'un rang au suivant, que

$$\forall n \geq 0, \quad \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!.$$

Par un changement de variables linéaires, on en déduit que les intégrales que nous devons calculer valent respectivement $(k-1)!\theta^{-k}$ et $(l-1)!\theta^{-l}$. Ainsi, l'unique valeur de c qui convient est $c = \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!}$.

La loi de X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dy = \frac{\theta^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\theta x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

Pour $k = 1$, on reconnaît la loi exponentielle de paramètre θ.

b) On fait, comme à l'exercice précédent, le changement de variables $(x, y) = \frac{1}{2}(u + v, u - v)$, de sorte que $x + y = u$ et $\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$. Ainsi, pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X+Y)] &= \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!} \int_{\mathbb{R}^2} g(x+y) x^{k-1} y^{l-1} e^{-\theta(x+y)} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}}\, dxdy \\
&= \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!2^{k+l-1}} \int_{\mathbb{R}^2} g(u)(u+v)^{k-1}(u-v)^{l-1} e^{-\theta u} \mathbb{1}_{\{u+v \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{u-v \geq 0\}}\, dudv \\
&= \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!2^{k+l-1}} \int_0^{+\infty} g(u) e^{-\theta u} \left(\int_{-u}^{u} (u+v)^{k-1}(u-v)^{l-1}\, dv \right) du,
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que les conditions $u+v \geq 0$ et $u-v \geq 0$ équivalent aux conditions $u \geq 0$ et $|v| \leq u$. Une suite de $l-1$ intégrations par parties permet d'établir l'égalité

$$\begin{aligned}
\int_{-u}^{u} (u+v)^{k-1}(u-v)^{l-1}\, dv &= \frac{(l-1)!(k-1)!}{(k+l-2)!} \int_{-u}^{u} (v+u)^{k+l-2}\, dv \\
&= \frac{(l-1)!(k-1)!}{(k+l-2)!} \int_0^{2u} v^{k+l-2}\, dv \\
&= \frac{(l-1)!(k-1)!}{(k+l-1)!} 2^{k+l-1} u^{k+l-1}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(X+Y)] &= \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!2^{k+l-1}} \int_0^{+\infty} g(u)e^{-\theta u}\frac{(l-1)!(k-1)!}{(k+l-1)!}2^{k+l-1}u^{k+l-1}\,du \\ &= \frac{\theta^{k+l}}{(k+l-1)!}\int_0^{+\infty} g(u)u^{k+l-1}e^{-\theta u}\,du.\end{aligned}$$

Ainsi, $X+Y$ suit une loi Gamma de paramètres θ et $k+l$.

6. Soient p et q deux réels compris entre 0 et 1. Soit (X,Y) un vecteur aléatoire tel que X suive la loi de Bernoulli de paramètre p et Y la loi de Bernoulli de paramètre q. Montrer qu'on a

$$\max(p+q-1,0)-pq \leq \mathrm{Cov}(X,Y) \leq \min(p,q)-pq$$

et que les deux bornes de cette égalité peuvent être atteintes.

Solution de l'exercice 6. On a $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[XY]-pq$. Il nous faut donc encadrer $\mathbb{E}[XY]$.

D'une part, $XY \leq X$ donc $\mathbb{E}[XY]\leq\mathbb{E}[X]=p$. De même, $\mathbb{E}[XY]\leq q$. Ainsi, $\mathbb{E}[XY]\leq \min(p,q)$.

D'autre part, $\mathbb{E}[XY]=\mathbb{P}(X=1 \text{ et } Y=1)$. Or pour tous événements A et B, l'égalité $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$ et l'inégalité $\mathbb{P}(A\cup B)\leq 1$ entraînent $\mathbb{P}(A\cap B)\geq \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-1$. Comme de plus $\mathbb{P}(A\cap B)\geq 0$, on a $\mathbb{P}(A\cap B)\geq \max(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-1,0)$. Avec $A=\{X=1\}$ et $B=\{Y=1\}$, on trouve $\mathbb{E}[XY]=\mathbb{P}(A\cap B)\geq\max(p+q-1,0)$. On a ainsi établi l'inégalité voulue.

Montrons que les deux bornes peuvent être atteintes pour tous p et q. Supposons $p\leq q$. Si le couple (X,Y) a la loi

$$\mathbb{P}(X=1,Y=1)=p,\ \mathbb{P}(X=0,Y=1)=q-p,\ \mathbb{P}(X=0,Y=0)=1-q,$$

alors X et Y suivent respectivement des lois de Bernoulli de paramètres p et q et $\mathrm{Cov}(X,Y)=\min(p,q)-pq$.

Pour la borne inférieure, distinguons deux cas suivant le signe de $p+q-1$. Supposons tout d'abord $p+q<1$. Alors si le couple (X,Y) a la loi

$$\mathbb{P}(X=1,Y=0)=p,\ \mathbb{P}(X=0,Y=1)=q,\ \mathbb{P}(X=0,Y=0)=1-p-q,$$

les lois de X et Y sont les bonnes et $\mathrm{Cov}(X,Y)=-pq$.

Enfin, si $p+q\geq 1$ et si le couple (X,Y) a la loi

$$\mathbb{P}(X=1,Y=0)=1-q,\ \mathbb{P}(X=0,Y=1)=1-p,\ \mathbb{P}(X=1,Y=1)=p+q-1,$$

alors les lois de X et Y sont les bonnes et $\mathrm{Cov}(X,Y)=p+q-1-pq$.

7. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire de dimension n dont chaque composante est de carré intégrable. On appelle *matrice de variance-covariance* (ou simplement *matrice de covariance*) de X la matrice

$$D = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{i,j=1\ldots n}.$$

Montrer que cette matrice est symétrique et positive, au sens où pour tout vecteur ligne $A = (a_1, \ldots, a_n)$ de n réels, on a l'inégalité

$$AD\,{}^tA = \sum_{i,j=1}^{n} a_i D_{ij} a_j \geq 0.$$

Solution de l'exercice 7. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels. Calculons la somme dont nous voulons montrer qu'elle est positive, en écrivant la définition de la matrice D puis de la covariance, puis la linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} a_i D_{ij} a_j &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i \mathrm{Cov}(X_i, X_j) a_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_i \mathbb{E}[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])] a_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}[a_i(X_i - E[X_i]) a_j (X_j - E[X_j])] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_i(X_i - E[X_i]) a_j (X_j - E[X_j])\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(X_i - E[X_i]) \sum_{j=1}^{n} a_j (X_j - E[X_j])\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(X_i - E[X_i])\right)^2\right].
\end{aligned}$$

La quantité qui nous intéresse est donc l'espérance d'une variable aléatoire positive et intégrable : c'est donc un nombre réel positif.