Université de Paris-Sud, 11
Faculté des sciences d'Orsay
L3 PIST

Probabilités

TD 4 : modélisation et fonctions caractéristiques

Exercice 1

La durée de vie, exprimée en années, d'un circuit électronique est une variable aléatoire T dont la fonction de répartition F est définie par : $F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Question intermédiaire : en posant $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$ dans la densité de probabilité de la gaussienne, démontrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

2. Donner la densité de probabilité f de T. Calculer $\mathbb{E}(T)$.

3. Sachant que le circuit a déjà fonctionné durant 1 an, quelle est la probabilité qu'il continue à fonctionner encore durant au moins 2 ans, c'est-à-dire $P(T \geq 3 | T \geq 1)$ (utiliser en premier lieu la règle de Bayes) ?

Un équipement électronique est composé de 10 circuits identiques et indépendants. Au circuit i $(1 \leq i \leq 10)$ est associée la variable aléatoire X_i, avec $X_i = 1$ si la durée de vie du circuit i est inférieure à un an et $X_i = 0$ sinon.

4. Quelle est la loi du nombre, N, de circuits dont la durée de vie est inférieure à 1 an ?

5. L'équipement est dit en série si la défaillance d'un seul de ses circuits entraîne sa défaillance. Quelle est alors la probabilité qu'il soit défaillant avant 1 an ?

6. L'équipement est dit en parallèle si sa défaillance ne peut se produire que si tous ses circuits sont défaillants. Quelle est alors la probabilité qu'il soit défaillant avant 1 an ?

Exercice 2

Une probabilité qui admet la densité gamma de paramètre (θ, α) s'écrit

$$f_X(x) = \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\theta x},\ x \in \mathbb{R}^+ \text{ (0 sinon) avec } \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Une telle variable aléatoire a pour fonction caractéristique $\phi_X(u) = \left(\frac{\theta}{\theta - iu}\right)^\alpha$.

1. Soit $Y \sim exp(\theta)$. Calculer la fonction caractéristique de Y.

2. Relier un cas particulier de la loi gamma à la loi exponentielle et retrouver la fonction caractéristique de la question 1.

3. Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de loi gamma de paramètres respectifs (θ, α_1) et (θ, α_2). (Le paramètre θ est identique.) Montrer que la loi de $X_1 + X_2$ est une loi gamma dont on précisera les paramètres.

4. Soit $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$. En utilisant la question précédente, en étudiant la fonction caractéristique de $\bar{X}_n$ donner la loi de la moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ (on étudiera d'abord la loi de $\sum_{i=1}^{n} X_i$).

5. Application :

Exercice 3

On considère un jeu de hasard où l'on vous tend deux enveloppes contenant de l'argent : l'une des deux enveloppes contient une somme d'argent notée S_1 l'autre une somme d'argent noté S_2 avec $S_1 < S_2$. Bien sûr, vous ne connaissez ni S_1 ni S_2 par contre, vous savez que S_2 est inférieure à une somme d'argent finie notée V et que S_1 est supérieure à zéro. Le jeu consiste à choisir une des deux enveloppes et à regarder la somme d'argent contenu dans cette enveloppe noté A. Maintenant, connaissant A, vous avez le choix

— de garder l'enveloppe que vous avez choisie et de gagner la somme qu'elle contient,

— ou de prendre l'autre enveloppe et de gagner la somme qu'elle contient.

L'idée de cet exercice est de montrer que, contrairement à l'intuition, il existe un protocole de choix pour obtenir une probabilité de repartir avec la plus grosse somme, S_2, strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.

1. Soit X une variable aléatoire munie d'une densité de probabilité uniforme sur $[0, V]$. Donner la fonction de répartition $F_X(x)$ de cette variable aléatoire.
2. Donner la distribution de probabilité de la variable aléatoire A *a priori*.

   Voici le protocole magique qui va nous permettre d'augmenter notre probabilité de gain. On suppose que l'on dispose d'un générateur de variables aléatoires (une calculatrice ou un ordinateur par exemple) uniforme sur $[0, V]$. On tire X à l'aide de ce générateur et on applique le protocole suivant

   — Si $X \leq A$ alors on garde l'enveloppe.

   — Si $X > A$ alors on choisit l'autre enveloppe.
3. On introduit maintenant la variable aléatoire G tel que

   — $G = A$ si $X \leq A$

   — $G = S_1 + S_2 - A$ si $X > A$.

   Montrer que G représente notre gain.
4. On cherche donc à démontrer que $P(G = S_2) > \frac{1}{2}$. Donner les quatre configurations possibles pour G en fonction des valeurs X et A.
5. Calculer $P(G = S_2)$ et démontrer qu'elle est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.
6. Supposons que l'on soit assez fou pour vous laisser jouez à ce jeu autant de fois de suite que vous le désirez. Montrer que l'espérance de vos gain en utilisant ce protocole est strictement supérieure à l'espérance de vos gain sans utiliser ce protocole.

Exercice 4

On utilise des fûts pour stocker un déchet toxique liquide. On suppose que sur la très longue période de stockage les fûts se dégradent. En particulier, par corrosion des perforations aléatoires apparaissent sur les fûts. Le liquide toxique s'écoule alors par ces perforations. On considère n fûts de hauteur h et on suppose que le nombre de perforations N par fût suit une loi de Poisson de paramètre θ et que ces perforations sont uniformément répartis sur la hauteur du fût. On notera Z_k la variable aléatoire réelle donnant la hauteur de la k-ième perforation.

On s'intéresse d'abord à un seul fût.

1. Quelle est la densité de probabilité des Z_k et leurs propriétés statistiques entre elles et vis-à-vis de N ?

On note Z la variable aléatoire correspondant à la hauteur de la perforation la plus basse sur le coté du fût.

2. Ecrire $P\left(Z > z \middle| N = n\right)$ en fonction de $P\left(Z_k > z\right)$ puis donner la fonction de répartition de Z et en déduire la densité de probabilité de Z (le tout conditionnellement à N.)

3. Calculer le pourcentage moyen $\tau_N = \frac{\mathbb{E}(Z|N)}{h}$ de liquide qu'on peut espérer conserver sachant le nombre de perforations N.

On considère maintenant l'ensemble des n fûts, avec n grand.

4. Quel pourcentage moyen du liquide toxique peut-on espérer conserver, c'est-à-dire $\tau = \mathbb{E}\left(\tau_N\right)$? Application numérique : $\theta = 5$.