

Signaux et systèmes linéaires

TP – Analyse spectrale et filtrage*

Évaluation : le TP fait l'objet d'un Test sur eCampus. Le test se déroule en fin de séance. Consulter eCampus en début de séance pour connaître les conditions d'évaluation.

Étudier les questions 10 à 13 avant de commencer le TP.

L'analyse spectrale est l'étude du contenu fréquentiel d'un signal, fondée sur la transformation de Fourier. L'objectif est de mettre en œuvre, avec Matlab®, une partie de ces outils.

1 Simulation de signaux

On considère une sinusoïde à la fréquence $f_0 = 440$ Hz

$$x(t) = A \sin(2\pi(f_0 t + \varphi)), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

avec l'amplitude $A \in \mathbb{R}$ et la phase réduite $\varphi \in [0, 1]$. C'est le « la » du diapason.

Ce signal est échantillonné aux instants $t_n = nT_e$, soit à la cadence $F_e = 1/T_e = 10$ kHz, pour produire un signal numérique $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ avec

$$x_n = A \sin(2\pi(\nu_0 n + \varphi)), \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

où ν_0 est la fréquence réduite.

1. Que vaut ν_0 en fonction de f_0 et F_e ?
2. Avec l'éditeur de Matlab (FILE → NEW), créer un fichier de commande (ou script) contenant la séquence de commande suivante

```
% efface les variables
clear all
% ferme les figures
close all
```

```
f0 = 440;
Fe = 1e4;
nu0 = f0 / Fe;
phi = 0.27;
A = 1.2;
N = 1024;
```

Remarque 1 Chaque lignes peut être indifféremment exécutée dans la console interactive ou écrite dans un script qui sera exécuté avec `TOOLS → RUN`. Pour cela il faut ajouter le dossier du script au `PATH` avec `FILE → SET PATH` pour que Matlab puisse le trouver.

3. Exécuter le programme et s'assurer que tout s'est passé comme attendu avec `whos`.

Remarque 2 `whos` donne la liste des variables en mémoire. Pour obtenir la valeur d'une variable : taper son nom suivie de la touche `enter`.

4. Créer le signal avec

```
n = (0:N-1)';
sig = A * sin(2 * pi * (nu0 * n + phi));
```

Remarque 3 La première ligne fabrique un vecteur contenant le temps discret $n = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, ou encore l'indice. La seconde est vectorielle : chaque élément du vecteur `n` est multiplié par la valeur `nu0`, la valeur de `phi` est ajoutée à chaque élément, etc.; enfin, la fonction `sin` donne le sinus de chaque élément. Toutes les opérations sont vectorielles.

5. Les vecteurs `n` et `sig` sont-ils des vecteurs lignes ou des vecteurs colonnes ?

6. Tracer le signal avec

```
figure(1), clf
plot(n, sig) % equivalent à plot(sig)
```

L'axe horizontal est gradué avec le numéro des échantillons ou l'indice.

Remarque 4 Matlab dispose d'une aide en ligne en tapant `help` ou `doc`. Par exemple, `help plot` ou `doc clf` donne le manuel d'utilisation de la commande `plot` et `clf` respectivement. La fin de chaque manuel renvoie à d'autres commandes sur le même sujet.

Remarque 5 Sauvegarder les figures avec `FILE → EXPORT` ou la fonction `saveas`.

7. Créer la variable `t`, à partie de `n`, contenant les instants temporels d'échantillonnage $t_n = nT_e$. Tracer, avec unités, `sig` en fonction du temps avec

```
figure(2), clf
subplot(2, 1, 1)
plot(t, sig)
subplot(2, 1, 2)
% Zoom sur les premiers échantillons
plot(t(10:100), sig(10:100))
```

Remarque 6 Utiliser également les commandes `axis`, `grid`, `title`, `xlabel`. La syntaxe `t(10:100)` extrait les éléments du tableau `t` des indices 10 à 100.

Remarque 7 Tous les graphiques doivent avoir les axes correctement labélisés.

8. Observer l'effet obtenu avec une fréquence d'échantillonnage F_e dix et cent fois plus élevée ; avec F_e dix et cent fois plus faible. Relier le résultat au phénomène de repliement spectrale.
9. Ajouter à la variable `sig` une deuxième sinusoïde proche de la première, avec par exemple une fréquence $f_1 = 460$ Hz et

*F. Orieux, M. Kowalski, T. Rodet, J.-F. Giovannelli, ...

d'amplitude voisine. Ajouter enfin une troisième sinusoïde à 2,5 kHz et d'amplitude moitié. Tracer le résultat.

2 Analyse spectrale

2.1 Rapports

10. Donner l'expression de la transformée de Fourier à temps continu du signal $x(t)$?
11. Donner l'expression de la transformée de Fourier à temps discret du signal $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$?
12. Quel lien y-a-t-il entre elles ? Pourquoi est-on obligé de définir une transformée de Fourier discrète (TFD) à horizon fini ?
13. Sur quel interval de fréquence la TFD est calculée.

2.2 Analyse

14. En utilisant la fonction `fft`, calculer le vecteur `spectre` contenant la transformée de Fourier discrète (TFD) du vecteur `sig`.

Remarque 8 Le résultat de `fft` peut être passé à `fftshift` pour faire comme si l'intervalle de fréquences (ou la période) était centré en 0.

15. Tracer la partie réelle, partie imaginaire, module au carré et phase du résultat de la TFD.

Remarque 9 La fonction `real` renvoie la partie réelle. Le manuel de cette fonction renvoie aux fonctions permettant de déterminer la partie imaginaire, le module et la phase. On met tous les éléments d'un vecteur `v` au carré avec `v.^2`, ou avec la fonction `pow` comme `pow(v, 2)`.

16. L'axe des fréquences doit être en fréquence réelle (donc pas en fréquence réduite ou en indice).

Remarque 10 Le vecteur de fréquence peut être fabriqué avec la fonction `linspace`.

17. Tracer le \log_{10} du module.
18. Retrouver les « pics » aux fréquences 440 Hz, 460 Hz et 2,5 kHz. Sont-ils positionnés précisément ? Évaluer cette précision en fonction de N . Expliquer la présence des trois autres pics.
19. Constater des « rebonds » au pieds des pics. On parle de *ringing* dans la littérature anglosaxonne. Expliquer leur origine.
20. Observer les composantes à 440 et 460 Hz lorsque $N = 1024$, $N = 512$ et $N = 256$. Commenter.
21. Commenter les résultats obtenus avec $F_e = 6$ kHz, $F_e = 4$ kHz et $F_e = 0,5$ kHz ?

2.3 Filtrage

On souhaite réaliser une opération de filtrage passe-pas du signal pour éliminer la composante à 2,5 kHz.

22. Filtrer dans le domaine de Fourier avec un passe-bas idéal.

Remarque 11 Pour réaliser le filtrage vous pouvez construire la réponse en fréquence du filtre à l'aide des fonctions `ones` et `zeros`. Pour concaténer des vecteurs on utilise la syntaxe `[v1; v2]` ou `[v1, v2]` si les vecteurs sont verticaux ou horizontaux. Ensuite `v3 .* v4` fera le produit terme à terme entre deux vecteurs de même taille.

Une autre possibilité est d'utiliser l'indexation, par exemple
`>>> v[t > 5] = 0`

met à zéros dans le vecteur `v` toutes les positions où `t > 5` est vrai.

23. Expliquer pourquoi cette opération de filtrage idéal dans le domaine de Fourier ne peut pas être réalisée en temps réel, dans l'espace des temps.

Pour réaliser un filtrage en temps réel dans l'espace des temps, une possibilité repose sur le filtrage par convolution.

24. Fabriquer un vecteur `h` contenant la réponse impulsionnelle définie comme

$$h_n = \begin{cases} \frac{1}{P} & \text{si } n \in [0; P-1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

25. Comment est définie sa réponse en fréquence ? La calculer numériquement et tracer son module. Quel est la nature de ce filtre (passe-haut, passe-bas, ...) ?

Remarque 12 La `fft` peut calculer sur plus de point que la taille du vecteur `h` avec `fft(h, length(sig))` par exemple.

26. Utiliser la fonction `filter` pour filtrer le signal d'origine dans l'espace direct.

Remarque 13 Pensez à regarder la documentation de cette fonction avec `doc filter`. Cette fonction permet d'appliquer l'équation récurrente d'un filtre numérique

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n s_{k-n} = \sum_{m=0}^{M-1} b_m e_{k-m}$$

connaissant les coefficients du filtre a_n , b_n et l'entrée e_k .

Vous devez donc déterminer les coefficients a_n et b_n sachant que vous avez une réponse impulsionnelle qui vérifie aussi

$$s_n = \sum_k e_k h_{n-k}.$$

Indice : la convolution est commutative.

27. Régler empiriquement la valeur de P pour éliminer les composantes au delà de 2 kHz. Avec les paramètres du point 2 partie 1, une valeur de P permet de filtrer exactement la raie à 2,5 kHz.
28. Comment prévoir à l'avance une « bonne valeur » pour P . Comparer les résultats obtenus à ceux obtenus par filtrage idéal.